Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 7/3/2003

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

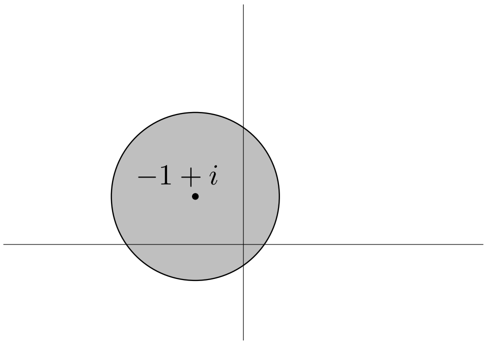
RESOLUÇÃO DA FICHA 1 – NÚMEROS COMPLEXOS E FUNÇÕES COMPLEXAS

disponível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIV`

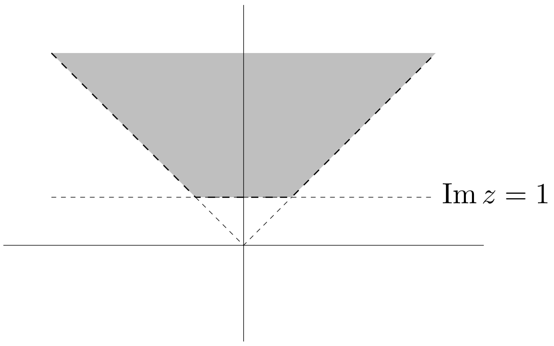
(1) Esboce os conjuntos dados pelas seguintes condições e diga quais deles são regiões:
  (a) $|z+1-i| \leq 3$;
  (b) $\operatorname{Im} z > 1$ e $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$;
  (c) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$;
  (d) $|z+i| > 2|z|$.

Resolução:

(a) *Enquanto* $|z+1-i| = 3$ *representa a circunferência de raio* $\sqrt{3}$ *centrada no ponto* $-1+i$*, a condição* $|z+1-i| \leq 3$ *representa o disco fechado de raio* $\sqrt{3}$ *e centro em* $-1+i$*. Uma vez que não se trata de um conjunto aberto,* não *é uma região.*



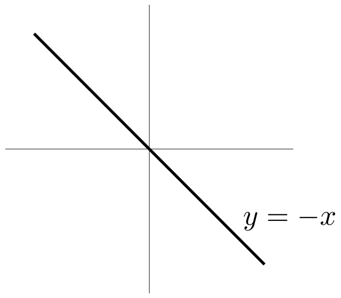
(b) *A condição* $\operatorname{Im} z > 1$ *representa um semiplano limitado inferiormente pela recta horizontal* $\operatorname{Im} z = 1$*. A condição* $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$ *representa um quarto de plano. A conjunção das duas condições representa um conjunto com o seguinte aspecto. Uma vez que o conjunto é aberto, conexo e não-vazio, é uma região.*



(c) *Em coordenadas cartesianas, escrevendo $z = x + iy$, a condição fica*

$$\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0 \iff x + y = 0 \ ,$$

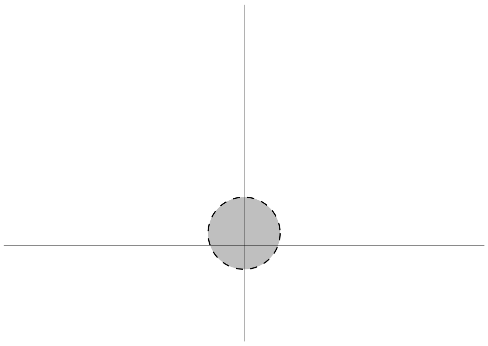
que é a equação da recta bissectriz dos segundo e quarto quadrantes. Uma vez que não se trata de um conjunto aberto, não *é uma região.*



(d) *Em coordenadas cartesianas, escrevendo $z = x + iy$, a condição fica*

$$\begin{aligned} |z+i| > 2|z| &\iff |z+i|^2 > 4|z|^2 \\ &\iff x^2 + (y+1)^2 > 4x^2 + 4y^2 \\ &\iff 3x^2 + 3y^2 - 2y - 1 < 0 \\ &\iff x^2 + y^2 - \tfrac{2}{3}y - \tfrac{1}{3} < 0 \\ &\iff x^2 + (y - \tfrac{1}{3})^2 < \tfrac{4}{9} \ , \end{aligned}$$

o que representa o interior de um disco de centro $(0, \frac{1}{3})$ (ou seja, o ponto complexo $\frac{1}{3}i$) e de raio $\frac{2}{3}$. Sendo um conjunto aberto, conexo e não-vazio, é uma região.



$\square$

(2) Calcule $\sqrt{-i}$, $\sqrt[3]{-i}$ e $\sqrt[4]{-i}$ e represente estes números geometricamente.

Resolução: *As coordenadas polares de $-i$ são $|-i| = 1$ e $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$, logo, em termos da exponencial complexa, $-i = e^{\frac{3\pi}{2}i}$. O símbolo $\sqrt[n]{-i}$ representa o conjunto dos números da forma*

$$e^{\frac{(3+4k)\pi}{2n}i} \ , \qquad \text{com } k = 0, 1, \ldots, n-1 \ .$$

Deduz-se que $\sqrt{-i}$ simboliza

$$e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{7\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \ ,$$

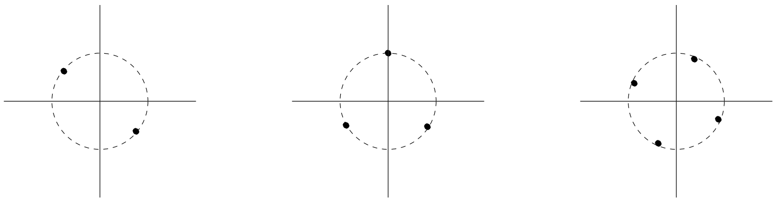
$\sqrt[3]{-i}$ *simboliza*

$$e^{\frac{3\pi}{6}i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i \ , \qquad e^{\frac{7\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{11\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \ ,$$

e $\sqrt[4]{-i}$ *simboliza*

$$e^{\frac{3\pi}{8}i} \ , \qquad e^{\frac{7\pi}{8}i} \ , \qquad e^{\frac{11\pi}{8}i} \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{15\pi}{8}i} \ .$$

Os números $\sqrt{-i}$, $\sqrt[3]{-i}$ *e* $\sqrt[4]{-i}$ *têm o seguinte aspecto geométrico, onde a circunferência tracejada tem raio 1.*



$\sqrt{i}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{i}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{i}$

□

(3) Resolva as seguintes equações:
 (a) $z^2 + 2iz + i - 1 = 0$;
 (b) $z^3 = (2-i)^3 + \frac{1+28i}{2+i}$.

Resolução:

(a) *Pela fórmula resolvente para a equação quadrática,*

$$\begin{aligned} z^2 + 2iz + i - 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad z = -i \pm \sqrt{-i} \\ &\Longleftrightarrow \quad z = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}-2}{2}i \ \text{ ou } \ z = \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}+2}{2}i \ . \end{aligned}$$

(b) *Começa-se por escrever o membro direito da equação na forma* $a + bi$*:*

$$(2-i)^3 + \frac{1+28i}{2+i} = 2 - 11i + \frac{1+28i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = 2 - 11i + \frac{30+55i}{5} = 8 \ .$$

Portanto, as soluções da equação dada são as raízes cúbicas de 8:

$$z^3 = 8 \iff \begin{cases} |z^3| = 8 \\ \arg z^3 = \arg 8 \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = 2 \\ \arg z = 0 \ \text{ou} \ \frac{2\pi}{3} \ \text{ou} \ \frac{4\pi}{3} \end{cases} .$$

As soluções são pois

$$2e^{i0} = 2 \ , \quad 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{e} \quad 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -1 + -i\sqrt{3} \ .$$

□

Comentário: *A fórmula resolvente para a equação quadrática vale para equações com coeficientes complexos. A sua demonstração resume-se a:*

$$az^2 + bz + c = a\left(z - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \ ,$$

onde $\sqrt{\cdot}$ *e* $-\sqrt{\cdot}$ *representam as duas raízes quadradas de um número complexo.* $\diamondsuit$

(4) Exprima $\cos 4\varphi$ e $\sin 3\varphi$ em termos de $\cos\varphi$ e $\sin\varphi$.

Resolução: *Para um ângulo* φ *real, temos*

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = e^{3\varphi i} = (e^{\varphi i})^3 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 \ .$$

Como

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi \ ,$$

extraindo as partes imaginárias, obtém-se

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi \ .$$

Temos $\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi = e^{4\varphi i} = (e^{\varphi i})^4 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^4$. *Como*

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 &= \cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi \\ &\quad -6\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 4i\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi \ ,\end{aligned}$$

extraindo as partes reais, obtém-se

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi \ .$$

$\square$

(5) Seja $f(z) = (x^2 - y^2) + 2i|xy|$ para $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Determine o subconjunto de $\mathbb{C}$ onde f é analítica e calcule $f'(z)$ nesses pontos.

Resolução: *Primeiro estuda-se as equações de Cauchy-Riemann.*
Escrevendo f *na forma* $u(x,y) + iv(x,y)$ *temos*

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 - y^2 \\ v(x,y) &= 2|xy| = \begin{cases} 2xy & \text{se } xy > 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0 \\ -2xy & \text{se } xy < 0 \ . \end{cases} \end{aligned}$$

Quando $xy > 0$, *o par* u, v *satisfaz as equações de Cauchy-Riemann:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \ . \end{cases}$$

Quando $xy = 0$, *a função* $v(x,y)$ *só tem ambas as derivadas parciais no ponto* $(0,0)$. *De facto, nos pontos da forma* $(0,y)$ *com* $y \neq 0$, *não existe* $\frac{\partial v}{\partial x}$ *já que*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{v(x,y)}{x} = 2y \neq -2y = \lim_{x\to 0^-} \frac{v(x,y)}{x} \ .$$

Da mesma maneira se vê que não existe $\frac{\partial v}{\partial y}$ *nos pontos da forma* $(x,0)$ *com* $x \neq 0$. *Por outro lado temos*

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0 \ .$$

Como $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$, *as condições de Cauchy-Riemann verificam-se no ponto* $(0,0)$.

Quando $xy < 0$, *o par* u, v *viola as equações de Cauchy-Riemann já que*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq -2x = \frac{\partial v}{\partial y} \ .$$

Conclusões quanto à diferenciabilidade.

Como u *e* v *têm derivadas parciais contínuas em* $\{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid xy > 0\} \cup \{(0,0)\}$, *conclui-se que a função* f *é diferenciável em todos esses pontos. (Recorde-se que, se uma função complexa* $f = u + iv$ *é tal que o par* u, v *satisfaz as equações de Cauchy-Riemann no ponto* (x,y) *e* u *e* v *têm derivadas parciais contínuas em* (x,y), *então* f *é diferenciável no ponto* $z = x + iy$.*)*

Em qualquer outro ponto, isto é, para $z \in \{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid xy \leq 0\} \backslash \{(0,0)\}$, *a função* f *não é diferenciável porque não satisfaz as equações de Cauchy-Riemann. (Recorde-se que, se uma função complexa* $f = u + iv$ *é diferenciável no ponto* $z = x + iy$, *então o par* u, v *satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em* (x,y).*)*

Conclusões quanto à analiticidade – resposta ao exercício.

A função f *é analítica no aberto* $\{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid xy > 0\}$, *formado pelos primeiro e terceiro quadrantes, e em mais parte nenhuma. (Na origem, a função* f *é diferenciável com derivada* $f'(0) = 0$, *mas não é analítica pois* $z = 0$ *não admite qualquer vizinhança aberta onde* f *seja diferenciável.)*

Em $\{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid xy > 0\}$ *(que é onde* $f(z)$ *é analítica), a derivada de* f *é dada, por exemplo, pela fórmula*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \ .$$

Como, neste domínio,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(2xy) \ = \ 2y \end{aligned}$$

conclui-se que

$$f'(z) = 2x + 2yi = 2z \ .$$

□

Comentário: *O resultado* $f'(z) = 2z$ *da alínea (b), poderia ter sido equivalentemente obtido se se tivesse inicialmente observado que a função dada coincide com a função* $g(z) = z^2$ *no domínio de analiticidade.*

Note-se ainda que, em $\{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid xy < 0\}$, *a função dada coincide com a função* $h(z) = \overline{z}^2$, *a qual não é analítica em qualquer ponto.* ♢

(6) (a) Mostre que em coordenadas polares as equações de Cauchy-Riemann se escrevem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} \ . \end{cases}$$

(b) Mostre que a função

$$g(z) = g\left(\rho e^{i\theta}\right) = 3\ln\frac{\rho}{5} + i3\theta$$

é analítica em todo o seu domínio $\rho > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$. Calcule $g'(z)$.

Resolução:

(a) *Se*

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{cases}$$

então

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}$$

e, pelo teorema da função inversa,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \\ -\frac{\sin\theta}{\rho} & \frac{\cos\theta}{\rho} \end{bmatrix}.$$

As equações de Cauchy-Riemann ficam

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \\ -\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \\ -\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho} &= \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho} \qquad (\star) \\ \\ -\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho} &= \frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho} \qquad (\star\star) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cos\theta(\star) - \sin\theta(\star\star) \\ \\ \sin\theta(\star) + \cos\theta(\star\star) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{cases}$$

(b) *Quando as partes real e imaginária de uma função complexa são continuamente diferenciáveis, satisfazer as equações de Cauchy-Riemann é suficiente para garantir a diferenciabilidade.*
Neste caso,

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re} f = 3\ln\tfrac{\varrho}{5} \\ v &= \operatorname{Im} f = 3\theta \end{aligned}$$

e as equações de Cauchy-Riemann são sempre satisfeitas:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} & = & \frac{3}{\rho} & = & \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} & = & 0 & = & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} \ . \end{cases}$$

Logo, f é analítica em todo o seu domínio. A derivada pedida é

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \\ &= \left(\frac{3}{\rho}\cos\theta + 0\right) + i\left(0 - 3\frac{\sin\theta}{\rho}\right) \\ &= \frac{3\rho\cos\theta - i3\rho\sin\theta}{\rho^2} \\ &= \frac{3\bar{z}}{|z|^2} \\ &= \frac{3}{z} \ . \end{aligned}$$

Comentário: A função dada é igual a $f(z) = 3\log_0 \frac{z}{5}$, onde $\log_0$ representa o ramo do logaritmo obtido escolhendo o elemento de $\mathrm{Log} z$ com parte imaginária no intervalo $]0, 2\pi[$. $\diamondsuit$

$\square$