Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 7/3/2003

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

FICHA 2 – FUNÇÕES ESPECIAIS E INTEGRAÇÃO COMPLEXA

para entregar até à aula teórica de **6ª feira, 21 de Março**

(1) Escreva todos os valores de $(-1)^{2i}$ na forma $a + bi$.

(2) Estabeleça a igualdade $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \cosh(2y)$ (onde $z = x + iy$).

(3) Determine os subconjuntos de $\mathbb{C}$ onde a função co-seno se anula e onde ela toma valores reais.

(4) Calcule, para as curvas γ e funções f indicadas, os integrais $\int_\gamma f(z)\,dz$.

(a) $f(z) = e^z$, γ o segmento de recta de $z = i$ até $z = 1$, com esta orientação;

(b) $f(z) = e^z$, γ constituída pelos segmentos de recta sobre os eixos coordenados entre os pontos anteriores, com a mesma orientação;

(c) $f(z) = \frac{\overline{z}-1}{z}$, γ a semi-circunferência $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $0 \leq \theta \leq \pi$, percorrida no sentido positivo (ou directo ou anti-horário).

(5) Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$u(x, y) = e^{-y} \cos x + y(x - 1) \ .$$

(a) Mostre que u é harmónica.

(b) Determine uma função $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

seja analítica e satisfaça $f(0) = 1$.

(c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - i)^2}\,dz$$

onde C é a circunferência de centro na origem e raio π percorrida uma vez no sentido positivo.

(6) Calcule os seguintes integrais:

(a) $\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{z+\frac{\pi}{2}}\,dz$, onde γ é a curva $|z| = 1$ percorrida uma vez no sentido positivo;

(b) $\oint_\gamma \frac{\cos z}{z(z-i)}\,dz$, onde γ é a elipse $3x^2 + 2y^2 = 1$ percorrida uma vez no sentido positivo;

(c) $\oint_\gamma \frac{\sin z}{(z-i)^{10}}\,dz$, onde γ é a curva $|z| = 2$ percorrida uma vez no sentido positivo.