

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

RESOLUÇÃO DA FICHA 2 – FUNÇÕES ESPECIAIS E INTEGRAÇÃO COMPLEXA

disponível em <http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIV>

(1) Escreva todos os valores de  $(-1)^{2i}$  na forma  $a + bi$ .

**Resolução:** Por definição, o símbolo  $(-1)^{2i}$  representa a família de números  $e^{2i\text{Log}(-1)}$ .  
 Como

$$\text{Log}(-1) = \underbrace{\ln|-1|}_{\ln 1=0} + i \underbrace{(\arg(-1) + 2k\pi)}_{-\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

obtem-se

$$(-1)^{2i} = e^{2i\text{Log}(-1)} = -2(\pi + 2k\pi) = 2\pi + 4k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Estes números estão na forma  $a + bi$  pois são todos reais. □

(2) Estabeleça a igualdade  $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \cosh(2y)$  (onde  $z = x + iy$ ).

**Resolução:** As funções co-seno e seno são definidas por

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad e \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Como  $|w|^2 = w \cdot \bar{w}$ , e escrevendo  $z = x + iy$ , fica

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 + |\sin z|^2 &= \cos z \cdot \overline{\cos z} + \sin z \cdot \overline{\sin z} \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}}{2} + \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}}{-2i} \\ &= \frac{e^{i(z-\bar{z})} + e^{i(z+\bar{z})} + e^{i(-z-\bar{z})} + e^{i(-z+\bar{z})}}{4} \\ &\quad + \frac{e^{i(z-\bar{z})} - e^{i(z+\bar{z})} - e^{i(-z-\bar{z})} + e^{i(-z+\bar{z})}}{4} \\ &= \frac{2e^{i(z-\bar{z})} + 2e^{i(-z+\bar{z})}}{4} \\ &= \frac{e^{i(2y)} + e^{i(-2y)}}{2} \\ &= \cosh(2y). \end{aligned}$$

□

(3) Determine os subconjuntos de  $\mathbb{C}$  onde a função co-seno se anula e onde ela toma valores reais.

**Resolução:** A função co-seno anula-se quando

$$\cos z = 0 \iff \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \iff e^{iz} = -e^{-iz} \iff e^{2iz} = -1.$$

Ora, para  $w = x + iy$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 e^w = -1 &\iff \begin{cases} |e^w| = e^x = |-1| = 1 \\ \arg e^w = y = \arg(-1) = \pi \pmod{2\pi} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
 &\iff w = i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \cos z = 0 &\iff e^{2iz} = -1 \iff 2iz = i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},
 \end{aligned}$$

ou seja, o co-seno complexo anula-se apenas nos seus zeros reais já conhecidos.

A função co-seno toma valores reais nos pontos onde a sua parte imaginária se anula. Em termos de  $z = x + iy$ , tem-se a decomposição

$$\begin{aligned}
 \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} \\
 &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} \\
 &= \underbrace{\frac{(e^{-y} + e^y) \cos x}{2}}_{\text{Re } \cos z} + i \underbrace{\frac{(e^{-y} - e^y) \sin x}{2}}_{\text{Im } \cos z}.
 \end{aligned}$$

Por isso, o co-seno complexo toma valores reais quando

$$\begin{aligned}
 \text{Im } \cos z = 0 &\iff (e^{-y} - e^y) \sin x = 0 \\
 &\iff e^{-y} = e^y \text{ ou } \sin x = 0 \\
 &\iff y = 0 \text{ ou } x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 &\iff z = x, x \in \mathbb{R} \text{ ou } z = k\pi + iy, k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Trata-se do conjunto formado pelo eixo real em  $\mathbb{C}$  e pela colecção de rectas verticais com abcissas da forma  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

- (4) Calcule, para as curvas  $\gamma$  e funções  $f$  indicadas, os integrais  $\int_{\gamma} f(z) dz$ .
- $f(z) = e^z$ ,  $\gamma$  o segmento de recta de  $z = i$  até  $z = 1$ , com esta orientação;
  - $f(z) = e^z$ ,  $\gamma$  constituída pelos segmentos de recta sobre os eixos coordenados entre os pontos anteriores, com a mesma orientação;
  - $f(z) = \frac{z-1}{z}$ ,  $\gamma$  a semi-circunferência  $z = re^{i\theta}$ , com  $r > 0$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ , percorrida no sentido positivo (ou directo ou anti-horário).

**Resolução:**

- (a) Como  $F(z) = e^z$  é uma primitiva de  $f(z) = e^z$ , pelo teorema fundamental do cálculo tem-se

$$\int_{\gamma} e^z dz = F(1) - F(i) = e - e^i.$$

- (b) Pelo teorema fundamental do cálculo, o resultado é igual ao da alínea anterior:

$$\int_{\gamma} e^z dz = F(1) - F(0) + F(0) - F(i) = e - e^i.$$

- (c) Este integral tem que ser calculado pela definição. Escolhendo a parametrização de  $\gamma$  dada por

$$z(t) = re^{it}, \quad t \in [0, \pi], \quad \text{com } z'(t) = ire^{it},$$

o integral fica

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\bar{z}-1}{z} dz &= \int_0^{\pi} \frac{re^{-it}-1}{re^{it}} \cdot ire^{it} dt \\ &= i \int_0^{\pi} (re^{-it} - 1) dt \\ &= i [ire^{-it} - t]_{t=0}^{t=\pi} \\ &= i(-ir - \pi - ir + 0) \\ &= 2r - i\pi. \end{aligned}$$

□

- (5) Seja  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$u(x, y) = e^{-y} \cos x + y(x - 1).$$

- (a) Mostre que  $u$  é harmónica.  
 (b) Determine uma função  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

seja analítica e satisfaça  $f(0) = 1$ .

- (c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz$$

onde  $C$  é a circunferência de centro na origem e raio  $\pi$  percorrida uma vez no sentido positivo.

### Resolução:

- (a) Uma vez que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-y} \cos x + e^{-y} \cos x = 0,$$

conclui-se que a função  $u$  é harmónica.

- (b) Para que  $f$  seja analítica, é necessário que o par de funções  $u$  e  $v$  satisfaça as equações de Cauchy-Riemann. Ou seja,  $v$  tem que satisfazer

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-y} \cos x - x + 1 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y} \sin x + y \end{cases} \implies \begin{cases} v(x, y) = e^{-y} \sin x - \frac{1}{2}x^2 + x + c_1(y) \\ v(x, y) = e^{-y} \sin x + \frac{1}{2}y^2 + c_2(x), \end{cases}$$

donde se conclui que  $v$  tem que ser da forma

$$v(x, y) = e^{-y} \sin x - \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}y^2 + c, \quad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

Como tanto  $u$  como as funções  $v$  desta família são de classe  $C^1$  e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em todo o plano, as funções  $f = u + iv$  são analíticas em  $\mathbb{C}$ . Para que seja  $f(0) = 1$ , a parte imaginária de  $f$  na origem tem que ser zero, pelo que

$$v(0, 0) = c = 0.$$

A função procurada é pois

$$v(x, y) = e^{-y} \sin x + \frac{y^2 - x^2}{2} + x .$$

- (c) O ponto  $i$  está dentro da curva  $C$ , e a função  $f(z)$  do numerador é analítica em todo o  $\mathbb{C}$ . Pela segunda fórmula integral de Cauchy (i.e., a fórmula com  $n = 1$ ), obtém-se que

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz = 2\pi i f'(i) .$$

Usando os cálculos da alínea anterior,

$$f'(i) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, 1) + i \frac{\partial v}{\partial x}(0, 1) = 1 + i \left( \frac{1}{e} + 1 \right) ,$$

pelo que o integral pedido é

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz = 2\pi i - 2\pi \left( \frac{1}{e} + 1 \right) .$$

□

**Comentário:** A função  $f$  da alínea (b) pode ser escrita  $f(z) = e^{iz} - \frac{i}{2}z^2 + iz$ . ◇

- (6) Calcule os seguintes integrais:

- (a)  $\oint_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z + \frac{\pi}{2}} dz$ , onde  $\gamma$  é a curva  $|z| = 1$  percorrida uma vez no sentido positivo;  
 (b)  $\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z(z-i)} dz$ , onde  $\gamma$  é a elipse  $3x^2 + 2y^2 = 1$  percorrida uma vez no sentido positivo;  
 (c)  $\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{(z-i)^{10}} dz$ , onde  $\gamma$  é a curva  $|z| = 2$  percorrida uma vez no sentido positivo.

**Resolução:**

- (a) A função integranda é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ . Como o ponto  $\frac{\pi}{2}$  está fora da curva  $\gamma$ , podemos encontrar uma região simplesmente conexa  $A$  onde a integranda é analítica e contendo o caminho  $\gamma$  (por exemplo,  $A$  pode ser o disco aberto de centro 0 e raio 1.2). Portanto, pelo teorema de Cauchy, o integral é zero.  
 (b) A função integranda é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{0, i\}$ . A origem está dentro da elipse  $\gamma$ , mas o ponto  $i$  está fora. Logo, a função  $f(z) = \frac{\cos z}{z-i}$  é analítica numa região simplesmente conexa  $A$  contendo  $\gamma$  (por exemplo,  $A = \{x + iy \in \mathbb{C} : 3x^2 + 2y^2 < 1.2\}$ ). Pela primeira (i.e., para  $n = 0$ ) fórmula integral de Cauchy, tem-se

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos z}{z(z-i)} dz = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = -2\pi .$$

- (c) A função  $g(z) = \sin z$  é analítica em todo o plano  $\mathbb{C}$ . Pela fórmula integral de Cauchy com  $n = 9$ , tem-se

$$\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{(z-i)^{10}} dz = \frac{2\pi i}{9!} g^{(9)}(i) = \frac{2\pi i}{9!} \cos i = \frac{\pi i}{9!} \left( \frac{1}{e} + e \right) ,$$

onde se usou que  $g^{(4k)}(z) = g(z) = \sin z$ , para  $k = 1, 2, 3, \dots$

□

**Comentário:** Cada um destes integrais pode ser equivalentemente calculado pelo teorema dos resíduos. ◇