Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 21/3/2003

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

RESOLUÇÃO DA FICHA 2 – FUNÇÕES ESPECIAIS E INTEGRAÇÃO COMPLEXA

disponível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIV`

(1) Escreva todos os valores de $(-1)^{2i}$ na forma $a+bi$.

Resolução: *Por definição, o símbolo* $(-1)^{2i}$ *representa a família de números* $e^{2i\mathrm{Log}(-1)}$. *Como*

$$\mathrm{Log}(-1) = \underbrace{\ln|-1|}_{\ln 1 = 0} + i(\underbrace{\arg(-1)}_{-\pi} + 2k\pi) \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ ,$$

obtém-se

$$(-1)^{2i} = e^{2i\mathrm{Log}(-1)} = -2(\pi + 2k\pi) = 2\pi + 4k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Estes números estão na forma $a+bi$ *pois são todos reais.* □

(2) Estabeleça a igualdade $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \cosh(2y)$ (onde $z = x+iy$).

Resolução: *As funções co-seno e seno são definidas por*

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad e \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \ .$$

Como $|w|^2 = w \cdot \overline{w}$, *e escrevendo* $z = x+iy$, *fica*

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 + |\sin z|^2 &= \cos z \cdot \overline{\cos z} + \sin z \cdot \overline{\sin z} \\
&= \tfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \cdot \tfrac{e^{-i\overline{z}}+e^{i\overline{z}}}{2} + \tfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \cdot \tfrac{e^{-i\overline{z}}-e^{i\overline{z}}}{-2i} \\
&= \tfrac{e^{i(z-\overline{z})}+e^{i(z+\overline{z})}+e^{i(-z-\overline{z})}+e^{i(-z+\overline{z})}}{4} \\
&\quad + \tfrac{e^{i(z-\overline{z})}-e^{i(z+\overline{z})}-e^{i(-z-\overline{z})}+e^{i(-z+\overline{z})}}{4} \\
&= \tfrac{2e^{i(z-\overline{z})}+2e^{i(-z+\overline{z})}}{4} \\
&= \tfrac{e^{i(2y)}+e^{i(-2y)}}{2} \\
&= \cosh(2y) \ .
\end{aligned}$$

□

(3) Determine os subconjuntos de $\mathbb{C}$ onde a função co-seno se anula e onde ela toma valores reais.

Resolução: *A função co-seno anula-se quando*

$$\cos z = 0 \iff \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0 \iff e^{iz} = -e^{-iz} \iff e^{2iz} = -1 \ .$$

Ora, para $w = x + iy$, tem-se

$$e^w = -1 \iff \begin{cases} |e^w| = e^x = |-1| = 1 \\ \arg e^w = y = \arg(-1) = \pi \mod 2\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \pi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff w = i(\pi + 2k\pi) \ , \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

Assim,

$$\begin{aligned} \cos z = 0 \iff e^{2iz} = -1 &\iff 2iz = i(\pi + 2k\pi) \ , \ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff z = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \ , \end{aligned}$$

ou seja, o co-seno complexo anula-se apenas nos seus zeros reais já conhecidos.

A função co-seno toma valores reais nos pontos onde a sua parte imaginária se anula. Em termos de $z = x + iy$, tem-se a decomposição

$$\begin{aligned} \cos z &= \tfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \tfrac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{2} \\ &= \tfrac{e^{-y}(\cos x + i\sin x)+e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2} \\ &= \underbrace{\frac{(e^{-y}+e^{y})\cos x}{2}}_{\operatorname{Re}\cos z} + i\underbrace{\frac{(e^{-y}-e^{y})\sin x}{2}}_{\operatorname{Im}\cos z} \ . \end{aligned}$$

Por isso, o co-seno complexo toma valores reais quando

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\cos z = 0 &\iff (e^{-y}-e^{y})\sin x = 0 \\ &\iff e^{-y} = e^{y} \ \textit{ou} \ \sin x = 0 \\ &\iff y = 0 \ \textit{ou} \ x = k\pi \ , k \in \mathbb{Z} \\ &\iff z = x \ , x \in \mathbb{R} \ \textit{ou} \ z = k\pi + iy \ , k \in \mathbb{Z} \ , y \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

Trata-se do conjunto formado pelo eixo real em $\mathbb{C}$ e pela colecção de rectas verticais com abcissas da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. □

(4) Calcule, para as curvas γ e funções f indicadas, os integrais $\int_\gamma f(z)\,dz$.
  (a) $f(z) = e^z$, γ o segmento de recta de $z = i$ até $z = 1$, com esta orientação;
  (b) $f(z) = e^z$, γ constituída pelos segmentos de recta sobre os eixos coordenados entre os pontos anteriores, com a mesma orientação;
  (c) $f(z) = \frac{\bar{z}-1}{z}$, γ a semi-circunferência $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $0 \le \theta \le \pi$, percorrida no sentido positivo (ou directo ou anti-horário).

Resolução:

(a) *Como $F(z) = e^z$ é uma primitiva de $f(z) = e^z$, pelo teorema fundamental do cálculo tem-se*

$$\int_\gamma e^z\,dz = F(1) - F(i) = e - e^i \ .$$

(b) *Pelo teorema fundamental do cálculo, o resultado é igual ao da alínea anterior:*

$$\int_\gamma e^z\,dz = F(1) - F(0) + F(0) - F(i) = e - e^i \ .$$

(c) *Este integral tem que ser calculado pela definição. Escolhendo a parametrização de γ dada por*

$$z(t) = re^{it}\ ,\ t \in [0,\pi]\ , \quad \text{com } z'(t) = ire^{it}\ ,$$

o integral fica

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \tfrac{\overline{z}-1}{z}\,dz &= \int_0^\pi \tfrac{re^{-it}-1}{re^{it}} \cdot ire^{it}\,dt \\
&= i\int_0^\pi \left(re^{-it}-1\right)\,dt \\
&= i\left[ire^{-it}-t\right]_{t=0}^{t=\pi} \\
&= i\left(-ir-\pi-ir+0\right) \\
&= 2r - i\pi\ .
\end{aligned}$$

□

(5) Seja $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$u(x,y) = e^{-y}\cos x + y(x-1)\ .$$

(a) Mostre que u é harmónica.

(b) Determine uma função $v:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que a função $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

seja analítica e satisfaça $f(0)=1$.

(c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-i)^2}\,dz$$

onde C é a circunferência de centro na origem e raio π percorrida uma vez no sentido positivo.

Resolução:

(a) *Uma vez que*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-y}\cos x + e^{-y}\cos x = 0\ ,$$

conclui-se que a função u é harmónica.

(b) *Para que f seja analítica, é necessário que o par de funções u e v satisfaça as equações de Cauchy-Riemann. Ou seja, v tem que satisfazer*

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-y}\cos x - x + 1 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \ \ \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y}\sin x + y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v(x,y) = e^{-y}\sin x - \frac{1}{2}x^2 + x + c_1(y) \\ v(x,y) = e^{-y}\sin x + \frac{1}{2}y^2 + c_2(x)\ , \end{cases}$$

donde se conclui que v tem que ser da forma

$$v(x,y) = e^{-y}\sin x - \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}y^2 + c\ , \quad \text{com } c \in \mathbb{R}\ .$$

Como tanto u como as funções v desta família são de classe C^1 e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em todo o plano, as funções $f = u + iv$ são analíticas em $\mathbb{C}$. Para que seja $f(0)=1$, a parte imaginária de f na origem tem que ser zero, pelo que

$$v(0,0) = c = 0\ .$$

A função procurada é pois

$$v(x,y) = e^{-y}\sin x + \frac{y^2 - x^2}{2} + x \ .$$

(c) *O ponto i está dentro da curva C, e a função $f(z)$ do numerador é analítica em todo o $\mathbb{C}$. Pela segunda fórmula integral de Cauchy (i.e., a fórmula com $n = 1$), obtém-se que*

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-i)^2}\, dz = 2\pi i f'(i) \ .$$

Usando os cálculos da alínea anterior,

$$f'(i) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,1) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,1) = 1 + i\left(\frac{1}{e} + 1\right) \ ,$$

pelo que o integral pedido é

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-i)^2}\, dz = 2\pi i - 2\pi\left(\frac{1}{e} + 1\right) \ .$$

$\square$

Comentário: *A função f da alínea (b) pode ser escrita $f(z) = e^{iz} - \frac{i}{2}z^2 + iz$.* $\diamondsuit$

(6) Calcule os seguintes integrais:

(a) $\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{z+\frac{\pi}{2}}\, dz$, onde γ é a curva $|z| = 1$ percorrida uma vez no sentido positivo;

(b) $\oint_\gamma \frac{\cos z}{z(z-i)}\, dz$, onde γ é a elipse $3x^2 + 2y^2 = 1$ percorrida uma vez no sentido positivo;

(c) $\oint_\gamma \frac{\sin z}{(z-i)^{10}}\, dz$, onde γ é a curva $|z| = 2$ percorrida uma vez no sentido positivo.

Resolução:

(a) *A função integranda é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$. Como o ponto $\frac{\pi}{2}$ está fora da curva γ, podemos encontrar uma região simplesmente conexa A onde a integranda é analítica e contendo o caminho γ (por exemplo, A pode ser o disco aberto de centro 0 e raio 1.2). Portanto, pelo teorema de Cauchy, o integral é zero.*

(b) *A função integranda é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, i\}$. A origem está dentro da elipse γ, mas o ponto i está fora. Logo, a função $f(z) = \frac{\cos z}{z-i}$ é analítica numa região simplesmente conexa A contendo γ (por exemplo, $A = \{x+iy \in \mathbb{C} : 3x^2 + 2y^2 < 1.2\}$). Pela primeira (i.e., para $n = 0$) fórmula integral de Cauchy, tem-se*

$$\oint_\gamma \frac{\cos z}{z(z-i)}\, dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i f(0) = -2\pi \ .$$

(c) *A função $g(z) = \sin z$ é analítica em todo o plano $\mathbb{C}$. Pela fórmula integral de Cauchy com $n = 9$, tem-se*

$$\oint_\gamma \frac{\sin z}{(z-i)^{10}}\, dz = \frac{2\pi i}{9!} g^{(9)}(i) = \frac{2\pi i}{9!}\cos i = \frac{\pi i}{9!}\left(\frac{1}{e} + e\right) \ ,$$

onde se usou que $g^{(4k)}(z) = g(z) = \sin z$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$.

$\square$

Comentário: *Cada um destes integrais pode ser equivalentemente calculado pelo teorema dos resíduos.* $\diamondsuit$