

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

RESOLUÇÃO DA FICHA 3
SÉRIES, SINGULARIDADES, RESÍDUOS E PRIMEIRAS EDO'S

disponível em <http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIV>

(1) Calcule as séries de Maclaurin (i.e., séries de Taylor em torno de $z_0 = 0$) das seguintes funções e indique os respectivos raios de convergência:

(a) $z^4 \cosh z^2$;

(b) $\frac{4}{z^2(z^2-4)}$;

(c) $\frac{1}{(2-z)^2} + (z+1)^2$.

Qual é a décima derivada de $z^4 \cosh z^2$ na origem?

Resolução:

(a) Usando a definição de $\cosh z$ e a série da exponencial, obtém-se o seguinte desenvolvimento:

$$\cosh w = \frac{e^w - e^{-w}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-w)^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w^{2k}}{(2k)!}, \quad \forall w \in \mathbb{C} .$$

Portanto, a série pedida é

$$z^4 \cosh z^2 = z^4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z^2)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{4k+4}}{(2k)!},$$

válida para qualquer z complexo, pelo que o seu raio de convergência é $+\infty$.

Como o coeficiente de z^{10} nesta série é zero, conclui-se que a décima derivada de $z^4 \cosh z^2$ na origem é zero.

(b) A função $\frac{4}{z^2(z^2-4)}$ tem um pólo duplo em 0, pelo que não tem série de Taylor em torno desse ponto, mas apenas série de Laurent:

$$\begin{aligned} \frac{4}{z^2(z^2-4)} &= \frac{1}{z^2-4} - \frac{1}{z^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{4}}{1-\frac{z^2}{4}} - \frac{1}{z^2} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z^2}{4}\right)^k - \frac{1}{z^2} \\ &= -\frac{1}{z^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{4^{k+1}} z^{2k}, \end{aligned}$$

onde a aplicação da soma da série geométrica requer que $|\frac{z^2}{4}| < 1$, pelo que a série obtida é válida na coroa $0 < |z| < 2$.

(c) A série de Maclaurin do polinómio $(z+1)^2$ é simplesmente $z^2 + 2z + 1$, válida para qualquer z . A série de Maclaurin da fracção $\frac{1}{(2-z)^2}$ pode ser obtida derivando uma

série geométrica:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(2-z)^2} &= \frac{d}{dz} \frac{1}{2-z} \\
 &= \frac{d}{dz} \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} \\
 &= \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dz} \frac{z^k}{2^k} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{kz^{k-1}}{2^k} \\
 &= \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{k+1}{2^{k+2}} z^k,
 \end{aligned}$$

válida para $|\frac{z}{2}| < 1$ ou seja $|z| < 2$. Assim a série pedida é

$$\frac{1}{(2-z)^2} + (z+1)^2 = \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{k+1}{2^{k+2}} z^k + z^2 + 2z + 1,$$

a qual tem raio de convergência 2. □

(2) Determine as séries de Laurent válidas nas regiões indicadas:

- (a) $e^{\frac{z}{z+1}}$ na coroa circular $0 < |z+1| < +\infty$;
- (b) $e^{\frac{z}{z+1}}$ no disco $|z-1| < 2$;
- (c) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ na coroa circular $0 < |z-2| < 1$.

Classifique as singularidades destas funções e indique os respectivos resíduos.

Resolução:

(a) Usando a série da exponencial ($e^w = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w^k}{k!}$ válida $\forall w \in \mathbb{C}$), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{z}{z+1}} &= e^{1-\frac{1}{z+1}} \\
 &= e \cdot e^{\frac{-1}{z+1}} \\
 &= e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-1}{z+1}\right)^k \\
 &= \sum_{k=-\infty}^0 \frac{e(-1)^k}{(-k)!} (z+1)^k,
 \end{aligned}$$

para qualquer $z \neq -1$, ou seja, na coroa circular $0 < |z+1| < +\infty$.

(b) Sendo analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, a função $e^{\frac{z}{z+1}}$ tem uma série de Taylor em torno do ponto 1 convergente no disco $|z - 1| < 2$. A melhor expressão para essa série é

$$\begin{aligned} e^{\frac{z}{z+1}} &= e \cdot e^{\frac{-1}{z+1}} \\ &= e \cdot e^{\frac{-1}{(z-1)+2}} \\ &= e \cdot e^{\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{(z-1)}{2}}} \\ &= e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{(z-1)}{2}} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e}{k!} \left(-\frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\frac{z-1}{2} \right)^\ell \right)^k . \end{aligned}$$

(c) Usando a série geométrica de razão $z - 2$ convergente para $|z - 2| < 1$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{1+(z-2)} \\ &= \frac{1}{z-2} - \sum_{k=0}^{+\infty} (2-z)^k \\ &= \sum_{k=-1}^{+\infty} (-1)^{k+1} (z-2)^k , \end{aligned}$$

o que é válido na coroa circular $0 < |z - 2| < 1$.

A função $e^{\frac{z}{z+1}}$ tem uma única singularidade no ponto -1 . Atendendo a que a série de Laurent válida em $0 < |z + 1| < +\infty$ tem infinitos termos em potências negativas de $z + 1$, conclui-se que -1 é uma singularidade essencial. O resíduo nesse ponto é $-e$ (o coeficiente de $\frac{1}{z+1}$ na série de Laurent).

A função $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ tem singularidades nos pontos 1 e 2. Observando a série da alínea (c), conclui-se que 2 é um pólo simples onde o resíduo da função é 1. Analogamente, vê-se que 1 também é um pólo simples com resíduo -1 . □

(3) Aplique o teorema dos resíduos para calcular os seguintes integrais:

- (a) $\int_{\gamma} \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} dz$, onde γ é a curva parametrizada por $2 \cos t + i \sin t, t \in [0, 2\pi]$;
- (b) $\int_{|z|=2} \frac{1+z}{1-\sin z} dz$, onde a circunferência é percorrida no sentido negativo.

Resolução:

(a) As duas singularidades, 1 e -1 , da função integranda $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ estão na região limitada pela elipse γ , pelo que, pelo teorema dos resíduos,

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} dz = 2\pi i (\text{Res}_1 f + \text{Res}_{-1} f) .$$

Vê-se que 1 é um pólo simples pois o limite $\lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z}{(z+1)^2} \right] = \frac{1}{4}$ existe diferente de zero. Logo, o resíduo de f neste ponto é (coincidindo com o

limite calculado antes, como acontece no caso de pólos simples)

$$\text{Res}_1 f = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)f(z)] = \frac{1}{4}.$$

Vê-se que -1 é um pólo duplo pois o limite $\lim_{z \rightarrow -1} [(z+1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow -1} \left[\frac{z}{z-1} \right] = \frac{1}{2}$ existe diferente de zero. Logo, o resíduo de f neste ponto é dado por

$$\text{Res}_{-1} f = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} [(z+1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{-1}{(z-1)^2} = -\frac{1}{4}.$$

Conclui-se que o integral vale zero:

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = 0.$$

- (b) A função integranda $g(z) = \frac{1+z}{1-\sin z}$ é singular nos pontos $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, onde $\sin z = 1$. Apenas a singularidade $z = \frac{\pi}{2}$ está na região limitada pela circunferência $|z| = 2$, pelo que, pelo teorema dos resíduos,

$$\int_{|z|=2} \frac{1+z}{1-\sin z} dz = 2\pi i \text{Res}_{\frac{\pi}{2}} f.$$

Vê-se que $\frac{\pi}{2}$ é um pólo duplo pois o seguinte limite existe diferente de zero:

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(z - \frac{\pi}{2})^2 g(z) \right] = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1+z) \cdot \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{(z - \frac{\pi}{2})^2}{1 - \sin z} \right] = \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \cdot 2,$$

onde, para calcular o segundo limite do produto, se aplicou duas vezes a regra de Cauchy para resolver as duas indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$. Logo, o resíduo de g neste ponto é dado por

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\frac{\pi}{2}} f &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{d}{dz} \left[(z - \frac{\pi}{2})^2 g(z) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{d}{dz} \left[(1+z) \frac{(z - \frac{\pi}{2})^2}{1 - \sin z} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[1 \cdot \frac{(z - \frac{\pi}{2})^2}{1 - \sin z} \right] + \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[(1+z) \cdot \frac{d}{dz} \frac{(z - \frac{\pi}{2})^2}{1 - \sin z} \right] \\ &= 2 + \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{d}{dz} \frac{(z - \frac{\pi}{2})^2}{1 - \sin z} \\ &= 2 + \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2(z - \frac{\pi}{2})(1 - \sin z) - (z - \frac{\pi}{2})^2 \cos z}{(1 - \sin z)^2} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Conclui-se que o integral vale

$$\int_{|z|=2} \frac{1+z}{1-\sin z} dz = 4\pi i.$$

□

- (4) Seja f a função definida por $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+9}$.

- (a) Utilize o teorema dos resíduos para calcular $\oint_{\gamma_R} f(z) dz$, onde γ_R é a curva fechada simples dada pela fronteira do semi-círculo,

$$D_R = \{z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi\},$$

de raio $R > 3$, percorrida no sentido positivo.

(b) Mostre que

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 9} dz \right| \leq \frac{R\pi}{R^2 - 9},$$

onde Γ_R é a semi-circunferência $\{z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$ contida em γ_R .

(c) Utilize os resultados das alíneas anteriores para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx.$$

Resolução:

(a) A função $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 9}$ tem singularidades nos pontos onde o denominador se anula. Ora $z^2 + 9 = 0 \iff z = \pm 3i$, pelo que se pode escrever $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-3i)(z+3i)}$. Verifica-se que os pontos $3i$ e $-3i$ são pólos simples pois os limites

$$\lim_{z \rightarrow 3i} [(z - 3i)f(z)] = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{e^{iz}}{z + 3i} = \frac{-i}{6e^3}$$

e

$$\lim_{z \rightarrow -3i} [(z + 3i)f(z)] = \lim_{z \rightarrow -3i} \frac{e^{3iz}}{z - 3i} = \frac{ie^3}{6}$$

existem finitos e diferentes de zero.

Utilizando o teorema dos resíduos, o integral pedido é igual a $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos de f nas singularidades envolvidas pela curva γ_R . Apenas o pólo $3i$ está na região limitada pela curva γ_R , pelo que

$$\oint_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{3i} f.$$

Tratando-se de um pólo simples, o resíduo de f em $3i$ coincide com o limite calculado acima,

$$\text{Res}_{3i} f = \lim_{z \rightarrow 3i} [(z - 3i)f(z)] = \frac{-i}{6e^3},$$

donde se conclui que o integral pedido vale $\frac{\pi}{3e^3}$.

(b) O módulo do integral é menor ou igual ao produto de um majorante M do módulo da função integranda pelo comprimento L do caminho. O comprimento da semi-circunferência Γ_R de raio R é $L = \pi R$. A integranda é majorada por

$$\left| \frac{e^{iz}}{z^2 + 9} \right| = \frac{|e^{iz}|}{|z^2 + 9|} \leq \frac{e^{-\text{Im}z}}{|z^2| - 9} \leq \frac{1}{R^2 - 9},$$

porque sobre Γ_R tem-se $|z| = R$ e $\text{Im}z \geq 0$. Tomando então $M = \frac{1}{R^2 - 9}$, obtém-se a desigualdade

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 9} dz \right| \leq M \cdot L = \frac{R\pi}{R^2 - 9}.$$

(c) Para qualquer raio $R > 3$ tem-se

$$\frac{\pi}{3e^3} = \oint_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 9} dz + \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + 9} dx.$$

Pela estimativa da alínea anterior, conclui-se que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 9} dz = 0$ pois em módulo estes integrais estão abaixo da função $\frac{R\pi}{R^2 - 9}$ a qual tende para zero quando

R tende para infinito porque o grau do polinómio em R no denominador é maior do que o do numerador. Então no limite $R \rightarrow +\infty$ da equação acima obtém-se

$$\frac{\pi}{3e^3} = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 9} dx .$$

Como $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$, conclui-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 9} dx = \frac{\pi}{3e^3} .$$

□

(5) Determine as soluções gerais das seguintes equações diferenciais:

- (a) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$;
 (b) $\frac{dy}{dt} + e^t y = 0$.

Resolução:

(a) A primeira equação é trivial, sendo resolvida imediatamente por primitivação:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \iff y(t) = \ln |t| + c , \quad c \in \mathbb{R} .$$

Cada função desta solução geral está definida para $t \neq 0$.

(b) A segunda equação é linear homogénea e também separável, podendo ser resolvida pelo método do factor de integração ou pelo método de separação de variáveis (ou decalcando um fórmula geral já deduzida). Por separação de variáveis, obtém-se para $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + e^t y = 0 &\iff \frac{\dot{y}}{y} = -e^t \\ &\iff \int \frac{1}{y} dy = - \int e^t dt + c , \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff \ln |y| = -e^t + c , \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff |y(t)| = e^{-e^t} e^c , \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff |y(t)| = k e^{-e^t} , \quad k \in \mathbb{R}^+ \\ &\iff y(t) = k e^{-e^t} , \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} . \end{aligned}$$

Esta dedução mostra também que se uma solução $y(t)$ não se anula nalgum instante t_0 , então ela nunca se anula para qualquer instante, pois a exponencial nunca se anula e a constante k é diferente de zero. Verifica-se agora que a função identicamente nula, $y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, também é solução da equação dada, e além disso pode ser escrita na forma acima se se tomar $k = 0$. Assim conclui-se que a solução geral da equação dada é a família

$$y(t) = k e^{-e^t} , \quad k \in \mathbb{R} ,$$

a qual está definida para todo o t real.

□