Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 4/4/2003

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

RESOLUÇÃO DA FICHA 3
SÉRIES, SINGULARIDADES, RESÍDUOS E PRIMEIRAS EDO'S

disponível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIV`

(1) Calcule as séries de Maclaurin (i.e., séries de Taylor em torno de $z_0 = 0$) das seguintes funções e indique os respectivos raios de convergência:
(a) $z^4 \cosh z^2$;
(b) $\frac{4}{z^2(z^2-4)}$;
(c) $\frac{1}{(2-z)^2} + (z+1)^2$.
Qual é a décima derivada de $z^4 \cosh z^2$ na origem?

Resolução:

(a) *Usando a definição de* $\cosh z$ *e a série da exponencial, obtém-se o seguinte desenvolvimento:*

$$\cosh w = \frac{e^w - e^{-w}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-w)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w^{2k}}{(2k)!} , \quad \forall w \in \mathbb{C} .$$

Portanto, a série pedida é

$$z^4 \cosh z^2 = z^4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z^2)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{4k+1}}{(2k)!} ,$$

válida para qualquer z *complexo, pelo que o seu raio de convergência é* $+\infty$.
Como o coeficiente de z^{10} *nesta série é zero, conclui-se que a décima derivada de* $z^4 \cosh z^2$ *na origem é zero.*

(b) *A função* $\frac{4}{z^2(z^2-4)}$ *tem um pólo duplo em* 0*, pelo que não tem série de Taylor em torno desse ponto, mas apenas série de Laurent:*

$$\begin{aligned}
\frac{4}{z^2(z^2-4)} &= \frac{1}{z^2-4} - \frac{1}{z^2} \\
&= \frac{-\frac{1}{4}}{1-\frac{z^2}{4}} - \frac{1}{z^2} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z^2}{4}\right)^k - \frac{1}{z^2} \\
&= -\frac{1}{z^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{4^{k+1}} z^{2k} ,
\end{aligned}$$

onde a aplicação da soma da série geométrica requer que $|\frac{z^2}{4}| < 1$*, pelo que a série obtida é válida na coroa* $0 < |z| < 2$.

(c) *A série de Maclaurin do polinómio* $(z+1)^2$ *é simplesmente* $z^2 + 2z + 1$*, válida para qualquer* z*. A série de Maclaurin da fracção* $\frac{1}{(2-z)^2}$ *pode ser obtida derivando uma* *série geométrica:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2-z)^2} &= \frac{d}{dz}\frac{1}{2-z} \\
&= \frac{d}{dz}\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} \\
&= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{d}{dz}\frac{z^k}{2^k} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{kz^{k-1}}{2^k} \\
&= \sum_{k=-1}^{+\infty}\frac{k+1}{2^{k+2}}z^k \ ,
\end{aligned}$$

válida para $|\frac{z}{2}| < 1$ *ou seja* $|z| < 2$. *Assim a série pedida é*

$$\frac{1}{(2-z)^2} + (z+1)^2 = \sum_{k=-1}^{+\infty}\frac{k+1}{2^{k+2}}z^k + z^2 + 2z + 1 \ ,$$

a qual tem raio de convergência 2.

□

(2) Determine as séries de Laurent válidas nas regiões indicadas:
(a) $e^{\frac{z}{z+1}}$ na coroa circular $0 < |z+1| < +\infty$;
(b) $e^{\frac{z}{z+1}}$ no disco $|z-1| < 2$;
(c) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ na coroa circular $0 < |z-2| < 1$.
Classifique as singularidades destas funções e indique os respectivos resíduos.

Resolução:
(a) *Usando a série da exponencial* ($e^w = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{w^k}{k!}$ *válida* $\forall w \in \mathbb{C}$), *obtém-se:*

$$\begin{aligned}
e^{\frac{z}{z+1}} &= e^{1-\frac{1}{z+1}} \\
&= e \cdot e^{\frac{-1}{z+1}} \\
&= e \cdot \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{-1}{z+1}\right)^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{0}\frac{e(-1)^k}{(-k)!}(z+1)^k \ ,
\end{aligned}$$

para qualquer $z \neq -1$, *ou seja, na coroa circular* $0 < |z+1| < +\infty$.

(b) *Sendo analítica em $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$, a função $e^{\frac{z}{z+1}}$ tem uma série de Taylor em torno do ponto 1 convergente no disco $|z-1|<2$. A melhor expressão para essa série é*

$$\begin{aligned}
e^{\frac{z}{z+1}} &= e\cdot e^{\frac{-1}{z+1}} \\
&= e\cdot e^{\frac{-1}{(z-1)+2}} \\
&= e\cdot e^{\frac{-\frac{1}{2}}{1+(\frac{z-1}{2})}} \\
&= e\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{1+(\frac{z-1}{2})}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e}{k!}\left(-\frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^\ell\right)^k .
\end{aligned}$$

(c) *Usando a série geométrica de razão $z-2$ convergente para $|z-2|<1$, obtém-se*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1} \\
&= \frac{1}{z-2}-\frac{1}{1+(z-2)} \\
&= \frac{1}{z-2}-\sum_{k=0}^{+\infty}(2-z)^k \\
&= \sum_{k=-1}^{+\infty}(-1)^{k+1}(z-2)^k ,
\end{aligned}$$

o que é válido na coroa circular $0<|z-2|<1$.

A função $e^{\frac{z}{z+1}}$ tem uma única singularidade no ponto -1. Atendendo a que a série de Laurent válida em $0<|z+1|<+\infty$ tem infinitos termos em potências negativas de $z+1$, conclui-se que -1 é uma singularidade essencial. O resíduo nesse ponto é $-e$ (o coeficiente de $\frac{1}{z+1}$ na série de Laurent).

A função $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ tem singularidades nos pontos 1 e 2. Observando a série da alínea (c), conclui-se que 2 é um pólo simples onde o resíduo da função é 1. Analogamente, vê-se que 1 também é um pólo simples com resíduo -1. □

(3) Aplique o teorema dos resíduos para calcular os seguintes integrais:

(a) $\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\,dz$, onde γ é a curva parametrizada por $2\cos t+i\sin t, t\in[0,2\pi]$;

(b) $\int_{|z|=2}\frac{1+z}{1-\sin z}\,dz$, onde a circunferência é percorrida no sentido negativo .

Resolução:

(a) *As duas singularidades, 1 e -1, da função integranda $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ estão na região limitada pela elipse γ, pelo que, pelo teorema dos resíduos,*

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\,dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}_1 f+\mathrm{Res}_{-1}f) .$$

Vê-se que 1 é um pólo simples pois o limite $\lim_{z\to1}[(z-1)f(z)]=\lim_{z\to1}\left[\frac{z}{(z+1)^2}\right]=\frac{1}{4}$ existe diferente de zero. Logo, o resíduo de f neste ponto é (coincidindo com o *limite calculado antes, como acontece no caso de pólos simples)*

$$\mathrm{Res}_1 f = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)f(z)\right] = \frac{1}{4}\ .$$

Vê-se que -1 *é um pólo duplo pois o limite* $\lim_{z\to -1}\left[(z+1)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to -1}\left[\frac{z}{z-1}\right] = \frac{1}{2}$ *existe diferente de zero. Logo, o resíduo de* f *neste ponto é dado por*

$$\mathrm{Res}_{-1} f = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\frac{z}{z-1} = \lim_{z\to -1}\frac{-1}{(z-1)^2} = -\frac{1}{4}\ .$$

Conclui-se que o integral vale zero:

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) = 0\ .$$

(b) *A função integranda* $g(z) = \frac{1+z}{1-\sin z}$ *é singular nos pontos* $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, *onde* $\sin z = 1$. *Apenas a singularidade* $z=\frac{\pi}{2}$ *está na região limitada pela circunferência* $|z| = 2$, *pelo que, pelo teorema dos resíduos,*

$$\int_{|z|=2}\frac{1+z}{1-\sin z}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{\frac{\pi}{2}} f\ .$$

Vê-se que $\frac{\pi}{2}$ *é um pólo duplo pois o seguinte limite existe diferente de zero:*

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left[(z-\frac{\pi}{2})^2 g(z)\right] = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}(1+z)\cdot\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{(z-\frac{\pi}{2})^2}{1-\sin z}\right] = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\ ,$$

onde, para calcular o segundo limite do produto, se aplicou duas vezes a regra de Cauchy para resolver as duas indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$. *Logo, o resíduo de* g *neste ponto é dado por*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{\frac{\pi}{2}} f &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\tfrac{d}{dz}\left[(z-\tfrac{\pi}{2})^2 g(z)\right]\\
&= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\tfrac{d}{dz}\left[(1+z)\tfrac{(z-\frac{\pi}{2})^2}{1-\sin z}\right]\\
&= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left[1\cdot\tfrac{(z-\frac{\pi}{2})^2}{1-\sin z}\right] + \lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left[(1+z)\cdot\tfrac{d}{dz}\tfrac{(z-\frac{\pi}{2})^2}{1-\sin z}\right]\\
&= 2+\left(1+\tfrac{\pi}{2}\right)\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\tfrac{d}{dz}\tfrac{(z-\frac{\pi}{2})^2}{1-\sin z}\\
&= 2+\left(1+\tfrac{\pi}{2}\right)\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\tfrac{2(z-\frac{\pi}{2})(1-\sin z)-(z-\frac{\pi}{2})^2\cos z}{(1-\sin z)^2}\\
&= 2\ .
\end{aligned}$$

Conclui-se que o integral vale

$$\int_{|z|=2}\frac{1+z}{1-\sin z}\,dz = 4\pi i\ .$$

□

(4) Seja f a função definida por $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+9}$.

(a) Utilize o teorema dos resíduos para calcular $\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz$, onde γ_R é a curva fechada simples dada pela fronteira do semi-círculo,

$$D_R = \{z = \rho e^{i\theta}\in\mathbb{C}\mid 0\le\rho\le R\ ,\ 0\le\theta\le\pi\}\ ,$$

de raio $R>3$, percorrida no sentido positivo.

(b) Mostre que

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+9}\, dz \right| \leq \frac{R\pi}{R^2-9} \ ,$$

onde Γ_R é a semi-circunferência $\{z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$ contida em γ_R.

(c) Utilize os resultados das alíneas anteriores para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\, dx \ .$$

Resolução:

(a) *A função $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+9}$ tem singularidades nos pontos onde o denominador se anula. Ora $z^2+9=0 \iff z = \pm 3i$, pelo que se pode escrever $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-3i)(z+3i)}$. Verifica-se que os pontos $3i$ e $-3i$ são pólos simples pois os limites*

$$\lim_{z\to 3i} [(z-3i)f(z)] = \lim_{z\to 3i} \frac{e^{iz}}{z+3i} = \frac{-i}{6e^3}$$

e

$$\lim_{z\to -3i} [(z+3i)f(z)] = \lim_{z\to -3i} \frac{e^{3iz}}{z-3i} = \frac{ie^3}{6}$$

existem finitos e diferentes de zero.

Utilizando o teorema dos resíduos, o integral pedido é igual a $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos de f nas singularidades envolvidas pela curva γ_R. Apenas o pólo $3i$ está na região limitada pela curva γ_R, pelo que

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{3i} f \ .$$

Tratando-se de um pólo simples, o resíduo de f em $3i$ coincide com o limite calculado acima,

$$\mathrm{Res}_{3i} f = \lim_{z\to 3i} [(z-3i)f(z)] = \frac{-i}{6e^3} \ ,$$

donde se conclui que o integral pedido vale $\frac{\pi}{3e^3}$.

(b) *O módulo do integral é menor ou igual ao produto de um majorante M do módulo da função integranda pelo comprimento L do caminho. O comprimento da semi-circunferência Γ_R de raio R é $L = \pi R$. A integranda é majorada por*

$$\left| \frac{e^{iz}}{z^2+9} \right| = \frac{|e^{iz}|}{|z^2+9|} \leq \frac{e^{-\mathrm{Im} z}}{|z^2|-9} \leq \frac{1}{R^2-9} \ ,$$

porque sobre Γ_R tem-se $|z| = R$ e $\mathrm{Im} z \geq 0$. Tomando então $M = \frac{1}{R^2-9}$, obtém-se a desigualdade

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+9}\, dz \right| \leq M \cdot L = \frac{R\pi}{R^2-9} \ .$$

(c) *Para qualquer raio $R > 3$ tem-se*

$$\frac{\pi}{3e^3} = \oint_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+9}\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+9}\, dx \ .$$

Pela estimativa da alínea anterior, conclui-se que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+9}\, dz = 0$ pois em módulo estes integrais estão abaixo da função $\frac{R\pi}{R^2-9}$ a qual tende para zero quando

R tende para infinito porque o grau do polinómio em R no denominador é maior do que o do numerador. Então no limite $R \to +\infty$ da equação acima obtém-se

$$\frac{\pi}{3e^3} = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+9}\, dx \ .$$

Como $\cos x = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right)$, conclui-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9}\, dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+9}\, dx = \frac{\pi}{3e^3} \ .$$

$\square$

(5) Determine as soluções gerais das seguintes equações diferenciais:

(a) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$;

(b) $\frac{dy}{dt} + e^t y = 0$.

Resolução:

(a) *A primeira equação é trivial, sendo resolvida imediatamente por primitivação:*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \iff y(t) = \ln|t| + c \ , \qquad c \in \mathbb{R} \ .$$

Cada função desta solução geral está definida para $t \neq 0$.

(b) *A segunda equação é linear homogénea e também separável, podendo ser resolvida pelo método do factor de integração ou pelo método de separação de variáveis (ou decalcando um fórmula geral já deduzida). Por separação de variáveis, obtém-se para $y \neq 0$*

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} + e^t y = 0 \quad &\iff \quad \tfrac{\dot{y}}{y} = -e^t \\ &\iff \quad \textstyle\int \frac{1}{y}\, dy = -\int e^t\, dt + c \ , \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad \ln|y| = -e^t + c \ , \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad |y(t)| = e^{-e^t} e^c \ , \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad |y(t)| = k e^{-e^t} \ , \quad k \in \mathbb{R}^+ \\ &\iff \quad y(t) = k e^{-e^t} \ , \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ . \end{aligned}$$

Esta dedução mostra também que se uma solução $y(t)$ não se anula nalgum instante t_0, então ela nunca se anula para qualquer instante, pois a exponencial nunca se anula e a constante k é diferente de zero. Verifica-se agora que a função identicamente nula, $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, também é solução da equação dada, e além disso pode ser escrita na forma acima se se tomar $k = 0$. Assim conclui-se que a solução geral da equação dada é a família

$$y(t) = k e^{-e^t} \ , \qquad k \in \mathbb{R} \ ,$$

a qual está definida para todo o t real.

$\square$