Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 4/4/2003

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

FICHA 4 – EDO'S ESCALARES E EXPONENCIAL DE MATRIZES

para entregar até à aula teórica de **2ª feira, 28 de Abril**

(1) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais:
(a) $\dot{y} = 2ty + t$;
(b) $x' - 2e^{-x} = 2te^{-x}$.

(2) Determine a solução de cada um dos seguintes problemas de valor inicial:
(a) $\dot{y} = \dfrac{te^t + t}{2 + \sin y}$, $\quad y(0) = \dfrac{\pi}{2}$;
(b) $(xe^{xf} - 2f)f' = -fe^{xf} - 1$, $\quad f(0) = 1$;
(c) $\arctan y + e^{t^2} + \dfrac{t\dot{y}}{2 + 2y^2} = 0$, $\quad y(1) = 0$.

(3) Mostre que o problema de valor inicial

$$\dot{y} = y^{\frac{1}{3}} , \qquad y(0) = 0$$

tem infinitas soluções. Porque é que isto não contradiz o teorema de Picard?

(4) Esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de solução para as seguintes equações diferenciais:
(a) $\dot{y} = \sin y$;
(b) $\dot{y} = \frac{y+2t}{y-3t}$.

Sugestão: Na alínea (b), comece por achar as soluções da equação da forma $y(t) = ct$ onde c é um número real.

(5) Para cada uma das seguintes matrizes A, ache uma forma canónica de Jordan J e uma matriz de mudança de base S tal que $A = SJS^{-1}$ e calcule a exponencial e^{At}.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$