

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

RESOLUÇÃO DA FICHA 4 – EDO'S ESCALARES E EXPONENCIAL DE MATRIZES

disponível em <http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIV>

(1) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais:

- (a) $\dot{y} = 2ty + t$;
(b) $x' - 2e^{-x} = 2te^{-x}$.

Resolução:

(a) Esta equação é linear (com $a(t) = 2t$ e $b(t) = t$), podendo ser resolvida pelo método do factor de integração. Escolhendo $\mu(t) = e^{-\int a(t) dt} = e^{-t^2}$, e multiplicando a equação por este factor que nunca se anula, obtém-se uma equação equivalente

$$\begin{aligned} \dot{y} - 2ty = t &\iff \underbrace{\mu \dot{y} - 2t\mu y}_{\dot{\mu}} = t\mu \\ &\iff \frac{d}{dt}(\mu y) = t\mu \\ &\iff \mu y = \int te^{-t^2} dt + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff y(t) = e^{t^2} \left(-\frac{1}{2}e^{-t^2} \right) + ce^{t^2}, \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff y(t) = -\frac{1}{2} + ce^{t^2}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cada função desta solução geral é válida para $t \in \mathbb{R}$.

(b) Esta equação é separável:

$$\begin{aligned} x' - 2e^{-x} &= 2te^{-x} \\ \iff e^x x' &= 2t + 2 \\ \iff e^x &= t^2 + 2t + c \quad \text{com } c \in \mathbb{R} \\ \iff x(t) &= \ln(t^2 + 2t + c) \quad \text{com } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

O intervalo de definição de uma solução é um intervalo maximal contido em

$$\{t \in \mathbb{R} : t^2 + 2t + c > 0\}.$$

Uma vez que

$$t^2 + 2t + c = 0 \iff t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2} \iff t = -1 \pm \sqrt{1 - c},$$

conclui-se que: para $c > 1$ o domínio de uma solução é \mathbb{R} (pois $t^2 + 2t + c$ é sempre positivo); para $c = 1$ o domínio de uma solução é $]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$ (pois $t^2 + 2t + 1$ anula-se em $t = -1$); e para $c < 1$ o domínio de uma solução é $]-\infty, -1 - \sqrt{1 - c}[$ ou $]-1 + \sqrt{1 - c}, +\infty[$ (pois $t^2 + 2t + c$ é negativo ou zero em $[-1 - \sqrt{1 - c}, -1 + \sqrt{1 - c}]$).

□

(2) Determine a solução de cada um dos seguintes problemas de valor inicial:

- (a) $\dot{y} = \frac{te^t + t}{2 + \sin y}$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$;
 (b) $(xe^{xf} - 2f)f' = -fe^{xf} - 1$, $f(0) = 1$;
 (c) $\arctan y + e^{t^2} + \frac{t\dot{y}}{2 + 2y^2} = 0$, $y(1) = 0$.

Resolução:

(a) Uma vez que $2 + \sin y$ nunca se anula, a equação é equivalente à equação separável

$$(2 + \sin y)\dot{y} = te^t + t .$$

Integrando de 0 a t obtém-se

$$2y - \cos y - 2y(0) + \cos y(0) = te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 - (0 - 1 + 0) ,$$

ou seja,

$$2y - \cos y - te^t + e^t - \frac{1}{2}t^2 = \pi + 1 .$$

Uma vez que $2 + \sin y(0) = 2 + \sin \frac{\pi}{2} = 3 \neq 0$, o teorema da função implícita garante que esta equação define implicitamente y em função de t numa vizinhança de $t_0 = 0$.

(b) A equação pode-se escrever na forma

$$M(x, f) + N(x, f)\dot{f} = 0 ,$$

onde $M(x, f) = fe^{xf} + 1$ e $N(x, f) = xe^{xf} - 2f$. Tem-se

$$\frac{\partial M}{\partial f} = e^{xf} + xfe^{xf} = \frac{\partial N}{\partial x} ,$$

e M e N têm domínio em \mathbb{R}^2 que é simplesmente conexo, portanto a equação diferencial é exacta. Um potencial $F(x, f)$ para (M, N) é uma solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = fe^{xf} + 1 \\ \frac{\partial F}{\partial f} = xe^{xf} - 2f \end{cases} \iff \begin{cases} F(x, f) = e^{xf} + x + c_1(f) \\ F(x, f) = e^{xf} - f^2 + c_2(x) . \end{cases}$$

Por exemplo, $F(x, f) = e^{xf} + x - f^2$. Conclui-se que a solução do problema de valor inicial verifica a equação

$$e^{xf} + x - f^2 = F(0, 1) = 0 .$$

Uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial f} (e^{xf} + x - f^2) \Big|_{(x,f)=(0,1)} = (xe^{xf} - 2f) \Big|_{(x,f)=(0,1)} = -2 \neq 0 ,$$

o teorema da função implícita garante que esta equação define implicitamente f como uma função de x , para x numa vizinhança de $x_0 = 0$.

(c) Sejam $M(t, y) = \arctan y + e^{t^2}$ e $N(t, y) = \frac{t}{2+2y^2}$. Tem-se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2} \neq \frac{1}{2+2y^2} = \frac{\partial N}{\partial t} ,$$

logo a equação não é exacta.

Para que exista um factor de integração do tipo $\mu = \mu(t)$ é necessário que a seguinte equação tenha solução:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(t)(\arctan y + e^{t^2}) \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t\mu(t)}{2+2y^2} \right) \\ \Leftrightarrow \mu(t) \frac{1}{1+y^2} &= \mu(t) \frac{1}{2+2y^2} + \mu'(t) \frac{t}{2+2y^2} \\ \Leftrightarrow \mu'(t) \frac{t}{2+2y^2} &= \mu(t) \frac{1}{2+2y^2} \\ \Leftrightarrow \mu'(t)t &= \mu(t) . \end{aligned}$$

Assim, pode-se tomar $\mu(t) = t$ para factor de integração quando $t \neq 0$. Multiplicando a equação por t , obtém-se a seguinte equação exacta, a qual é equivalente à inicial para $t \neq 0$:

$$t \arctan y + te^{t^2} + \frac{t^2}{2+2y^2} \dot{y} = 0 .$$

Um potencial para esta equação é uma solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = t \arctan y + te^{t^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{t^2}{2+2y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(t, y) = \frac{t^2}{2} \arctan y + \frac{1}{2}e^{t^2} + f(y) \\ F(t, y) = \frac{t^2}{2} \arctan y + g(t) . \end{cases}$$

Escolhe-se

$$F(t, y) = \frac{t^2}{2} \arctan y + \frac{1}{2}e^{t^2} .$$

Como $F(1, 0) = \frac{1}{2}e$, a solução do problema de valor inicial verifica

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{2} \arctan y + \frac{1}{2}e^{t^2} &= \frac{1}{2}e \\ \Leftrightarrow \arctan y &= \frac{e - e^{t^2}}{t^2} \\ \Leftrightarrow y(t) &= \tan \left(\frac{e - e^{t^2}}{t^2} \right) . \end{aligned}$$

O intervalo de definição é o maior subintervalo do conjunto

$$D = \left\{ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : -\frac{\pi}{2} < \frac{e - e^{t^2}}{t^2} < \frac{\pi}{2} \right\}$$

que contém $t = 1$. Este intervalo não se consegue achar explicitamente uma vez que não se consegue resolver analiticamente as equações

$$\frac{e - e^{t^2}}{t^2} = \pm \frac{\pi}{2} .$$

□

(3) Mostre que o problema de valor inicial

$$\dot{y} = y^{\frac{1}{3}} , \quad y(0) = 0$$

tem infinitas soluções. Porque é que isto não contradiz o teorema de Picard?

Resolução: Começa-se por observar que o problema de valor inicial tem a solução constante $y(t) = 0$. Para $y \neq 0$ a equação é equivalente a

$$\begin{aligned} y^{-\frac{1}{3}} \dot{y} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} \left(y^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}} \right) &= t - t_0 \\ \Leftrightarrow y^{\frac{2}{3}} &= \frac{2}{3} (t - t_0) + y_0^{\frac{2}{3}} \\ \Leftrightarrow y(t)^2 &= \left(\frac{2}{3} (t - t_0) + y_0^{\frac{2}{3}} \right)^3 \\ \Leftrightarrow y(t) &= \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3} (t - t_0) + y_0^{\frac{2}{3}} \right)^3} \quad \text{para } \frac{2}{3} (t - t_0) + y_0^{\frac{2}{3}} \geq 0 \\ \Leftrightarrow y(t) &= \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3} (t - t_0) + y_0^{\frac{2}{3}} \right)^3} \quad \text{para } t \geq t_0 - \frac{3}{2} y_0^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\frac{d}{dt} \left(\pm \left(\frac{2}{3} (t - t_0) + y_0^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \right) = \pm \sqrt{\frac{2}{3} (t - t_0) + y_0^{\frac{2}{3}}},$$

tem-se

$$\lim_{t \rightarrow t_0 - \frac{3}{2} y_0^{\frac{2}{3}}} \frac{dy}{dt}(t) = 0$$

e portanto estas soluções podem-se prolongar ao instante $t = t_0 - \frac{3}{2} y_0^{\frac{2}{3}}$ como funções de classe C^1 . Em particular, para $y_0 = 0$ tem-se “soluções” (as aspas referem-se ao facto de não estarem definidas num intervalo aberto)

$$y(t) = \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3} (t - t_0) \right)^3} \quad \text{para } t \geq t_0$$

que se podem “colar” à solução constante igual a 0 para obter soluções da equação definidas para $t \in \mathbb{R}$:

$$y(t) = \begin{cases} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3} (t - t_0) \right)^3} & \text{para } t \geq t_0 \\ 0 & \text{para } t < t_0. \end{cases}$$

Se $t_0 \geq 0$ estas funções são soluções do problema de valor inicial dado (não é difícil provar que estas são todas as soluções), concluindo-se que há infinitas soluções.

Isto não contradiz o teorema de Picard porque a função $f(t, y) = y^{\frac{1}{3}}$ não é lipschitziana em relação a y em nenhuma vizinhança U de um ponto $(t_0, 0)$. Se f fosse lipschitziana num tal U , existiria L tal que

$$\frac{|f(t, y) - f(t, 0)|}{|y - 0|} \leq L \quad \text{para } (t, y) \in U.$$

Mas em qualquer tal vizinhança

$$\sup \frac{|y^{\frac{1}{3}} - 0|}{|y - 0|} = \sup |y^{-\frac{2}{3}}| = +\infty.$$

□

(4) Esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de solução para as seguintes equações diferenciais:

- (a) $\dot{y} = \sin y$;
- (b) $\dot{y} = \frac{y+2t}{y-3t}$.

Sugestão: Na alínea (b), comece por achar as soluções da equação da forma $y(t) = ct$ onde c é um número real.

Resolução:

(a) Para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ onde o gráfico da solução $y(t)$ tem declive $\frac{dy}{dt} = c$, é determinado pela equação

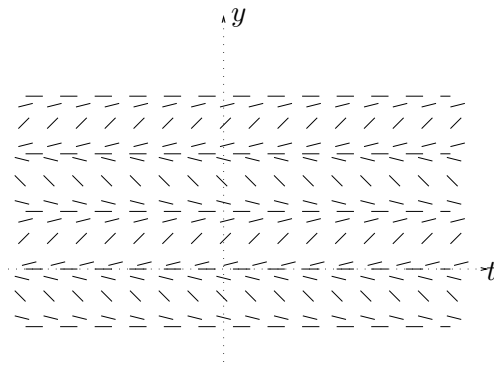
$$\sin y = c .$$

Portanto os declives possíveis têm que estar no intervalo $[-1, 1]$ e o campo de direcções é invariante mediante translações de 2π na direcção do eixo dos yy .

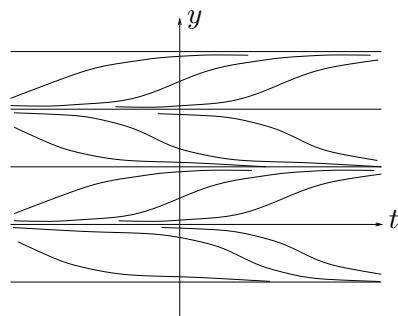
Casos especiais:

- $c = -1$ $\sin y = -1 \iff y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- $c = -\frac{1}{2}$ $\sin y = -\frac{1}{2} \iff y = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $y = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$
- $c = 0$ $y = k\pi$
- $c = \frac{1}{2}$ $\sin y = \frac{1}{2} \iff y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$
- $c = 1$ $\sin y = 1 \iff y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Esboço do campo de direcções:



Traçado dos tipos de solução:



(b) Para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ onde o gráfico da solução $y(t)$ tem declive $\frac{dy}{dt} = c$, é determinado pela equação

$$\frac{y + 2t}{y - 3t} = c .$$

e a equação não está definida para $y = 3t$. Note-se no entanto que, quando uma solução da equação tende para um ponto sobre esta recta, o declive do seu gráfico tende para infinito. Pode-se assim pensar nestes pontos como aqueles em que a recta tangente às soluções é vertical. Em geral, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{y + 2t}{y - 3t} &= c \\ \iff y + 2t &= cy - 3ct \\ \iff (1 - c)y &= -(3c + 2)t . \end{aligned}$$

Logo, os conjuntos de pontos onde o declive das soluções é constante igual a c são rectas que passam pela origem.

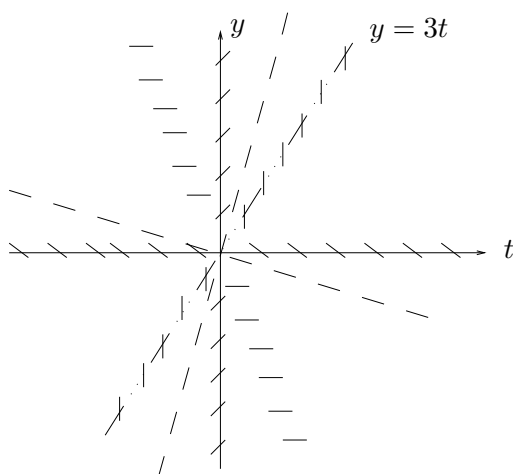
É natural ver se algumas destas rectas são soluções de acordo com a sugestão. A recta $y = ct$ é uma solução da equação sse

$$\begin{aligned} \frac{ct + 2t}{ct - 3t} &= c \\ \iff c + 2 &= c^2 - 3c \\ \iff c^2 - 4c - 2 &= 0 \\ \iff c &= 2 \pm \sqrt{6} . \end{aligned}$$

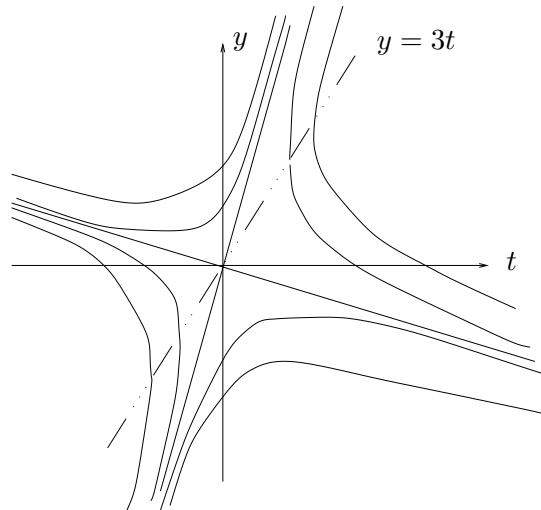
Casos especiais:

$$\begin{array}{ll} c = 1 & t = 0 \\ c = -\frac{2}{3} & y = 0 \\ c = 0 & y = -2t \end{array}$$

Esboço do campo de direcções:



Traçado dos tipos de solução:



□

- (5) Para cada uma das seguintes matrizes A , ache uma forma canónica de Jordan J e uma matriz de mudança de base S tal que $A = SJS^{-1}$ e calcule a exponencial e^{At} .

$$(a) A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad (c) A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (e) A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolução:

- (a) Os valores próprios de A são

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (3 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \iff \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = 2.$$

Como são dois valores diferentes, admitem dois vectores próprios linearmente independentes, pelo que a matriz é diagonalizável e pode-se tomar

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Os vectores próprios para $\lambda = 2$ são os vectores $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ que verificam

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = 0.$$

Uma base destes vectores próprios é constituída por

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Os vectores próprios para $\lambda = 3$ são os que verificam

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff b = -2a .$$

Uma base destes vectores próprios é constituída por

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} .$$

Portanto, uma matriz de mudança de base é

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} .$$

Como

$$A = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

a exponencial é

$$\begin{aligned} e^{At} &= Se^{Jt}S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 2(e^{2t} - e^{3t}) & e^{2t} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

(b) Os valores próprios de A são

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 &\iff \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)\left(\frac{5}{2} - \lambda\right) + \frac{1}{4} = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \\ &\iff (\lambda - 2)^2 = 0 \\ &\iff \lambda = 2 . \end{aligned}$$

Como não pode haver dois vectores próprios linearmente independentes (nesse caso o espaço próprio seria todo o \mathbb{R}^2 e portanto A teria de ser igual a $2I$ o que não é o caso), conclui-se que

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Um vector próprio associado a $\lambda = 2$ é uma solução da equação

$$\begin{aligned} (A - 2I)v &= 0 \\ \iff \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \iff a &= b . \end{aligned}$$

Uma base dos vectores próprios é constituída por

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Um vector próprio generalizado associado ao vector próprio v é uma solução w da equação

$$\begin{aligned}(A - 2I)w &= v \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b &= 1.\end{aligned}$$

Pode-se tomar, por exemplo, $a = -1$ e $b = 1$, isto é

$$w = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se que uma matriz de mudança de base S tal que $A = SJS^{-1}$ é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$A = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

a exponencial é

$$\begin{aligned}e^{At} &= Se^{Jt}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2-t}{2}e^{2t} & \frac{t}{2}e^{2t} \\ -\frac{t}{2}e^{2t} & \frac{2+t}{2}e^{2t} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(c) Os valores próprios de A são

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow (3-\lambda)(2-\lambda) + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{2}\end{aligned}$$

portanto a matriz é diagonalizável e tem-se

$$J = \begin{bmatrix} \frac{5+i\sqrt{7}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}.$$

Os vectores próprios para $\lambda = \frac{5+i\sqrt{7}}{2}$ são os que verificam

$$\begin{bmatrix} \frac{1-i\sqrt{7}}{2} & 1 \\ -2 & -\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \right) a,$$

portanto, uma base dos vectores próprios para $\lambda = \frac{5+i\sqrt{7}}{2}$ é constituída por

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}.$$

Como A é uma matriz real, os vectores próprios para $\lambda = \frac{5-i\sqrt{7}}{2}$ são os conjugados dos vectores próprios para $\lambda = \frac{5+i\sqrt{7}}{2}$. Logo, uma base dos vectores próprios é constituída por

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}.$$

A matriz de mudança de base é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}.$$

Como

$$A = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5+i\sqrt{7}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-i+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} & \frac{-i}{\sqrt{7}} \\ \frac{i+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} & \frac{i}{\sqrt{7}} \end{bmatrix},$$

a exponencial é, chamando $\lambda_1 = \frac{5+i\sqrt{7}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{5-i\sqrt{7}}{2}$,

$$\begin{aligned} e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-i+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} & \frac{-i}{\sqrt{7}} \\ \frac{i+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} & \frac{i}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\frac{5}{2}t} \cos \frac{t\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}} e^{\frac{5}{2}t} \sin \frac{t\sqrt{7}}{2} & \frac{2}{\sqrt{7}} e^{\frac{5}{2}t} \sin \frac{t\sqrt{7}}{2} \\ \frac{-4}{\sqrt{7}} e^{\frac{5}{2}t} \sin \frac{t\sqrt{7}}{2} & e^{\frac{5}{2}t} \cos \frac{t\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{\sqrt{7}} e^{\frac{5}{2}t} \sin \frac{t\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Os valores próprios de A são as soluções de

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 &\iff -\lambda^3 - \lambda = 0 \\ &\iff \lambda(\lambda^2 + 1) = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \pm i. \end{aligned}$$

Conclui-se que a matriz é diagonalizável e pode-se tomar

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Claramente,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um vector próprio de $\lambda = 0$. Os vectores próprios de $\lambda = i$ são os que verificam

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \iff \begin{cases} -ia = 0 \\ -ib - c = 0 \\ b - ic = 0 \end{cases} & \\ \iff a = 0 \text{ e } c = -ib. & \end{aligned}$$

Uma base dos vectores próprios para $\lambda = i$ é dada por

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Como A é uma matriz real os vectores próprios associados a $-i$ são os conjugados dos vectores próprios de i . Uma base é então dada por

$$v_3 = \overline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Consequentemente, uma matriz de mudança de base é dada por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{bmatrix}.$$

Como

$$A = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix},$$

a exponencial é

$$\begin{aligned} e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(e) Os valores próprios de A são as soluções de

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff -\lambda^3 + \lambda - \lambda = 0 \iff \lambda = 0.$$

Os vectores próprios de $\lambda = 0$ são os que satisfazem a equação

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} b = 0 \\ -a - c = 0. \end{cases}$$

A dimensão do espaço próprio de 0 é 1 portanto há um único bloco de Jordan. Assim,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma base dos vectores próprios associados a $\lambda = 0$ é

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A segunda coluna, w , da matriz S obtém-se resolvendo a equação

$$(A - 0I)w = v \iff \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pode-se tomar

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A terceira coluna, u , da matriz S obtém-se resolvendo a equação

$$(A - 0I)u = w \iff \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pode-se tomar

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, uma matriz de mudança de base é dada por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$A = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a exponencial é

$$\begin{aligned} e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} + 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ -t & 1 & -t \\ -\frac{t^2}{2} & t & 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□