Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 28/4/2003

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

RESOLUÇÃO DA FICHA 4 – EDO'S ESCALARES E EXPONENCIAL DE MATRIZES

disponível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIV`

(1) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais:
  (a) $\dot{y} = 2ty + t$;
  (b) $x' - 2e^{-x} = 2te^{-x}$.

Resolução:

(a) *Esta equação é linear (com $a(t) = 2t$ e $b(t) = t$), podendo ser resolvida pelo método do factor de integração. Escolhendo $\mu(t) = e^{-\int a(t)\,dt} = e^{-t^2}$, e multiplicando a equação por este factor que nunca se anula, obtém-se uma equação equivalente*

$$\begin{aligned}
\dot{y} - 2ty = t \quad &\Longleftrightarrow \quad \mu\dot{y} - \underbrace{2t\mu}_{\dot{\mu}}\, y = t\mu \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\mu y) = t\mu \\
&\Longleftrightarrow \quad \mu y = \int te^{-t^2}\,dt + c\ , \quad c \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad y(t) = e^{t^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right) + ce^{t^2}\ , \quad c \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{2} + ce^{t^2}\ , \quad c \in \mathbb{R}\ .
\end{aligned}$$

Cada função desta solução geral é válida para $t \in \mathbb{R}$.

(b) *Esta equação é separável:*

$$\begin{aligned}
& & x' - 2e^{-x} &= 2te^{-x} & & \\
&\Longleftrightarrow & e^x x' &= 2t + 2 & & \\
&\Longleftrightarrow & e^x &= t^2 + 2t + c & &\text{com } c \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow & x(t) &= \ln(t^2 + 2t + c) & &\text{com } c \in \mathbb{R}\ .
\end{aligned}$$

O intervalo de definição de uma solução é um intervalo maximal contido em

$$\{t \in \mathbb{R} : t^2 + 2t + c > 0\}\ .$$

Uma vez que

$$t^2 + 2t + c = 0 \iff t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2} \iff t = -1 \pm \sqrt{1 - c}\ ,$$

conclui-se que: para $c > 1$ o domínio de uma solução é $\mathbb{R}$ (pois $t^2 + 2t + c$ é sempre positivo); para $c = 1$ o domínio de uma solução é $]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$ (pois $t^2 + 2t + 1$ anula-se em $t = -1$); e para $c < 1$ o domínio de uma solução é $]-\infty, -1 - \sqrt{1-c}[$ ou $]-1 + \sqrt{1-c}, +\infty[$ (pois $t^2 + 2t + c$ é negativo ou zero em $[-1 - \sqrt{1-c}, -1 + \sqrt{1-c}]$.

$\square$

(2) Determine a solução de cada um dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\dot{y} = \dfrac{te^t + t}{2 + \sin y}$, $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$;

(b) $(xe^{xf} - 2f)f' = -fe^{xf} - 1$, $f(0) = 1$;

(c) $\arctan y + e^{t^2} + \dfrac{t\dot{y}}{2 + 2y^2} = 0$, $y(1) = 0$.

Resolução:

(a) *Uma vez que* $2 + \sin y$ *nunca se anula, a equação é equivalente à equação separável*

$$(2 + \sin y)\dot{y} = te^t + t \ .$$

Integrando de 0 *a* t *obtém-se*

$$2y - \cos y - 2y(0) + \cos y(0) = te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 - (0 - 1 + 0) \ ,$$

ou seja,

$$2y - \cos y - te^t + e^t - \frac{1}{2}t^2 = \pi + 1 \ .$$

Uma vez que $2 + \sin y(0) = 2 + \sin\frac{\pi}{2} = 3 \neq 0$, *o teorema da função implícita garante que esta equação define implicitamente* y *em função de* t *numa vizinhança de* $t_0 = 0$.

(b) *A equação pode-se escrever na forma*

$$M(x, f) + N(x, f)\dot{f} = 0 \ ,$$

onde $M(x, f) = fe^{xf} + 1$ *e* $N(x, f) = xe^{xf} - 2f$. *Tem-se*

$$\frac{\partial M}{\partial f} = e^{xf} + xfe^{xf} = \frac{\partial N}{\partial x} \ ,$$

e m *e* N *têm domínio em* $\mathbb{R}^2$ *que é simplesmente conexo, portanto a equação diferencial é exacta. Um potencial* $F(x, f)$ *para* (M, N) *é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = fe^{xf} + 1 \\ \frac{\partial F}{\partial f} = xe^{xf} - 2f \end{cases} \iff \begin{cases} F(x, f) = e^{xf} + x + c_1(f) \\ F(x, f) = e^{xf} - f^2 + c_2(x) \ . \end{cases}$$

Por exemplo, $F(x, f) = e^{xf} + x - f^2$. *Conclui-se que a solução do problema de valor inicial verifica a equação*

$$e^{xf} + x - f^2 = F(0, 1) = 0 \ .$$

Uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial f}\left(e^{xf} + x - f^2\right)\Big|_{(x,f)=(0,1)} = \left(xe^{xf} - 2f\right)\Big|_{(x,f)=(0,1)} = -2 \neq 0 \ ,$$

o teorema da função implícita garante que esta equação define implicitamente f *como uma função de* x, *para* x *numa vizinhança de* $x_0 = 0$.

(c) *Sejam* $M(t, y) = \arctan y + e^{t^2}$ *e* $N(t, y) = \frac{t}{2+2y^2}$. *Tem-se*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{1 + y^2} \neq \frac{1}{2 + 2y^2} = \frac{\partial N}{\partial t} \ ,$$

logo a equação não é exacta.

Para que exista um factor de integração do tipo $\mu = \mu(t)$ é necessário que a seguinte equação tenha solução:

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(t)(\arctan y + e^{t^2})\right) & = & \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t\mu(t)}{2+2y^2}\right) \\ \iff & \mu(t)\frac{1}{1+y^2} & = & \mu(t)\frac{1}{2+2y^2} + \mu'(t)\frac{t}{2+2y^2} \\ \iff & \mu'(t)\frac{t}{2+2y^2} & = & \mu(t)\frac{1}{2+2y^2} \\ \iff & \mu'(t)t & = & \mu(t)\ . \end{array}$$

Assim, pode-se tomar $\mu(t) = t$ para factor de integração quando $t \neq 0$. Multiplicando a equação por t, obtém-se a seguinte equação exacta, a qual é equivalente à inicial para $t \neq 0$:

$$t \arctan y + te^{t^2} + \frac{t^2}{2+2y^2}\ \dot{y} = 0\ .$$

Um potencial para esta equação é uma solução do sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial t} = t\arctan y + te^{t^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{t^2}{2+2y^2} \end{array}\right. \qquad \iff \qquad \left\{\begin{array}{l} F(t,y) = \frac{t^2}{2}\arctan y + \frac{1}{2}e^{t^2} + f(y) \\ F(t,y) = \frac{t^2}{2}\arctan y + g(t)\ . \end{array}\right.$$

Escolhe-se

$$F(t,y) = \frac{t^2}{2}\arctan y + \frac{1}{2}e^{t^2}\ .$$

Como $F(1,0) = \frac{1}{2}e$, a solução do problema de valor inicial verifica

$$\begin{array}{rl} & \frac{t^2}{2}\arctan y + \frac{1}{2}e^{t^2} = \frac{1}{2}e \\ \iff & \arctan y = \frac{e - e^{t^2}}{t^2} \\ \iff & y(t) = \tan\left(\frac{e-e^{t^2}}{t^2}\right)\ . \end{array}$$

O intervalo de definição é o maior subintervalo do conjunto

$$D = \{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : -\frac{\pi}{2} < \frac{e - e^{t^2}}{t^2} < \frac{\pi}{2}\}$$

que contém $t = 1$. Este intervalo não se consegue achar explicitamente uma vez que não se consegue resolver analiticamente as equações

$$\frac{e - e^{t^2}}{t^2} = \pm\frac{\pi}{2}\ .$$

$\square$

(3) Mostre que o problema de valor inicial

$$\dot{y} = y^{\frac{1}{3}}\ , \qquad y(0) = 0$$

tem infinitas soluções. Porque é que isto não contradiz o teorema de Picard?

Resolução: *Começa-se por observar que o problema de valor inicial tem a solução constante $y(t) = 0$. Para $y \neq 0$ a equação é equivalente a*

$$
\begin{aligned}
& y^{-\frac{1}{3}}\dot{y} = 1 \\
\iff \quad & \frac{3}{2}\left(y^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}}\right) = t - t_0 \\
\iff \quad & y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}(t - t_0) + y_0^{\frac{2}{3}} \\
\iff \quad & y(t)^2 = \left(\frac{2}{3}(t - t_0) + y_0^{\frac{2}{3}}\right)^3 \\
\iff \quad & y(t) = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(t - t_0) + y_0^{\frac{2}{3}}\right)^3} \qquad \text{para } \frac{2}{3}(t - t_0) + y_0^{\frac{2}{3}} \geq 0 \\
\iff \quad & y(t) = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(t - t_0) + y_0^{\frac{2}{3}}\right)^3} \qquad \text{para } t \geq t_0 - \frac{3}{2}y_0^{\frac{2}{3}} \ .
\end{aligned}
$$

Uma vez que

$$
\frac{d}{dt}\left(\pm\left(\frac{2}{3}(t - t_0) + y_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}(t - t_0) + y_0^{\frac{2}{3}}} \ ,
$$

tem-se

$$
\lim_{t \to t_0 - \frac{3}{2}y_0^{\frac{2}{3}}} \frac{dy}{dt}(t) = 0
$$

e portanto estas soluções podem-se prolongar ao instante $t = t_0 - \frac{3}{2}y_0^{\frac{2}{3}}$ como funções de classe C^1. Em particular, para $y_0 = 0$ tem-se "soluções" (as aspas referem-se ao facto de não estarem definidas num intervalo aberto)

$$
y(t) = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(t - t_0)\right)^3} \qquad \text{para } t \geq t_0
$$

que se podem "colar" à solução constante igual a 0 para obter soluções da equação definidas para $t \in \mathbb{R}$:

$$
y(t) = \begin{cases} \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(t - t_0)\right)^3} & \text{para } t \geq t_0 \\ 0 & \text{para } t < t_0 \ . \end{cases}
$$

Se $t_0 \geq 0$ estas funções são soluções do problema de valor inicial dado (não é difícil provar que estas são todas as soluções), concluindo-se que há infinitas soluções.

Isto não contradiz o teorema de Picard porque a função $f(t, y) = y^{\frac{1}{3}}$ não é lipschitziana em relação a y em nenhuma vizinhança U de um ponto $(t_0, 0)$. Se f fosse lipschitziana num tal U, existiria L tal que

$$
\frac{|f(t, y) - f(t, 0)|}{|y - 0|} \leq L \qquad \text{para } (t, y) \in U \ .
$$

Mas em qualquer tal vizinhança

$$
\sup \frac{\left|y^{\frac{1}{3}} - 0\right|}{|y - 0|} = \sup\left|y^{-\frac{2}{3}}\right| = +\infty \ .
$$

$\square$

(4) Esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de solução para as seguintes equações diferenciais:
   (a) $\dot{y} = \sin y$;
   (b) $\dot{y} = \frac{y+2t}{y-3t}$.

   Sugestão: Na alínea (b), comece por achar as soluções da equação da forma $y(t) = ct$ onde c é um número real.

Resolução:

(a) *Para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ onde o gráfico da solução $y(t)$ tem declive $\frac{dy}{dt} = c$, é determinado pela equação*

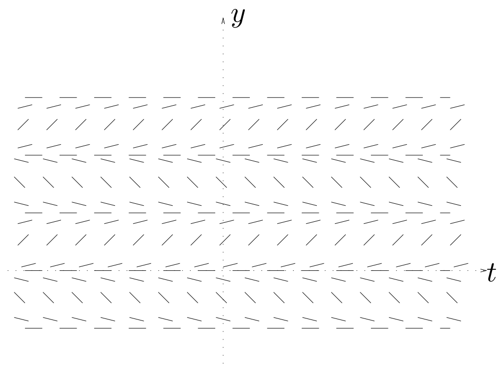
$$\sin y = c\ .$$

Portanto os declives possíveis têm que estar no intervalo $[-1, 1]$ e o campo de direcções é invariante mediante translações de 2π na direcção do eixo dos yy.

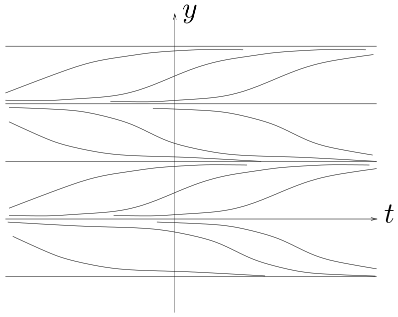
Casos especiais:

$c = -1$	$\sin y = -1 \iff y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$c = -\frac{1}{2}$	$\sin y = -\frac{1}{2} \iff y = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ *ou* $y = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$
$c = 0$	$y = k\pi$
$c = \frac{1}{2}$	$\sin y = \frac{1}{2} \iff y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ *ou* $y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$
$c = 1$	$\sin y = 1 \iff y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Esboço do campo de direcções:



Traçado dos tipos de solução:



(b) *Para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ onde o gráfico da solução $y(t)$ tem declive $\frac{dy}{dt} = c$, é determinado pela equação*

$$\frac{y + 2t}{y - 3t} = c \; .$$

e a equação não está definida para $y = 3t$. Note-se no entanto que, quando uma solução da equação tende para um ponto sobre esta recta, o declive do seu gráfico tende para infinito. Pode-se assim pensar nestes pontos como aqueles em que a recta tangente às soluções é vertical. Em geral, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{y + 2t}{y - 3t} = c \\ \iff \quad & y + 2t = cy - 3ct \\ \iff \quad & (1 - c)y = -(3c + 2)t \; . \end{aligned}$$

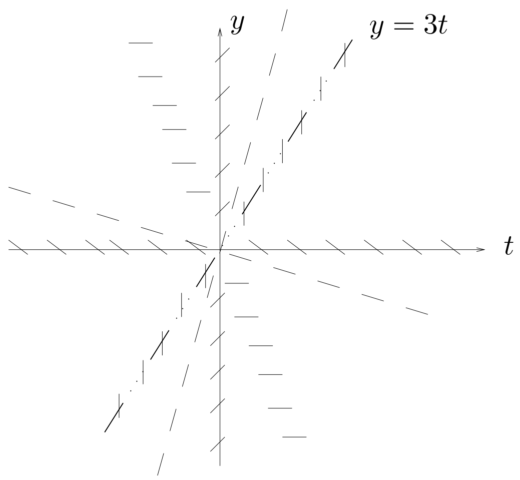
Logo, os conjuntos de pontos onde o declive das soluções é constante igual a c são rectas que passam pela origem.
É natural ver se algumas destas rectas são soluções de acordo com a sugestão. A recta $y = ct$ é uma solução da equação sse

$$\begin{aligned} & \frac{ct + 2t}{ct - 3t} = c \\ \iff \quad & c + 2 = c^2 - 3c \\ \iff \quad & c^2 - 4c - 2 = 0 \\ \iff \quad & c = 2 \pm \sqrt{6} \; . \end{aligned}$$

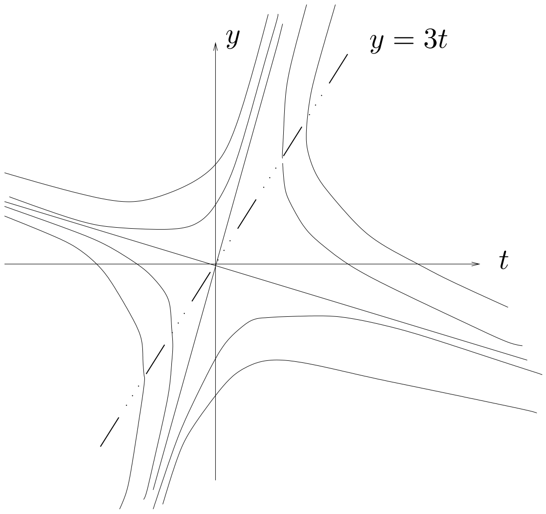
Casos especiais:

$$\begin{array}{ll} c = 1 & t = 0 \\ c = -\frac{2}{3} & y = 0 \\ c = 0 & y = -2t \end{array}$$

Esboço do campo de direcções:



Traçado dos tipos de solução:



$\square$

(5) Para cada uma das seguintes matrizes A, ache uma forma canónica de Jordan J e uma matriz de mudança de base S tal que $A = SJS^{-1}$ e calcule a exponencial e^{At}.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Resolução:

(a) *Os valores próprios de A são*

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \iff \lambda = 3 \textit{ ou } \lambda = 2 \ .$$

Como são dois valores diferentes, admitem dois vectores próprios linearmente independentes, pelo que a matriz é diagonalizável e pode-se tomar

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \ .$$

Os vectores próprios para $\lambda = 2$ são os vectores $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ que verificam

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = 0 \ .$$

Uma base destes vectores próprios é constituída por

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Os vectores próprios para $\lambda = 3$ são os que verificam

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff b = -2a .$$

Uma base destes vectores próprios é constituída por

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} .$$

Portanto, uma matriz de mudança de base é

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} .$$

Como

$$A = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

a exponencial é

$$\begin{aligned} e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 2(e^{2t} - e^{3t}) & e^{2t} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

(b) *Os valores próprios de A são*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad &\iff \quad (\frac{3}{2} - \lambda)(\frac{5}{2} - \lambda) + \frac{1}{4} = 0 \\ &\iff \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \\ &\iff \quad (\lambda - 2)^2 = 0 \\ &\iff \quad \lambda = 2 . \end{aligned}$$

Como não pode haver dois vectores próprios linearmente independentes (nesse caso o espaço próprio seria todo o $\mathbb{R}^2$ e portanto A teria de ser igual a $2I$ o que não é o caso), conclui-se que

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Um vector próprio associado a $\lambda = 2$ é uma solução da equação

$$\begin{aligned} & (A - 2I)v = 0 \\ \iff \quad & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \iff \quad & a = b . \end{aligned}$$

Uma base dos vectores próprios é constituída por

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Um vector próprio generalizado associado ao vector próprio v é uma solução w da equação

$$\begin{aligned} & (A-2I)w = v \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Longleftrightarrow \quad & -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 1 \ . \end{aligned}$$

Pode-se tomar, por exemplo, $a=-1$ e $b=1$, isto é

$$w = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Conclui-se que uma matriz de mudança de base S tal que $A = SJS^{-1}$ é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Como

$$A = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} ,$$

a exponencial é

$$\begin{aligned} e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2-t}{2}e^{2t} & \frac{t}{2}e^{2t} \\ \frac{-t}{2}e^{2t} & \frac{2+t}{2}e^{2t} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

(c) *Os valores próprios de A são*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad (3-\lambda)(2-\lambda)+2 = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 8 = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{2} \end{aligned}$$

portanto a matriz é diagonalizável e tem-se

$$J = \begin{bmatrix} \frac{5+i\sqrt{7}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} .$$

Os vectores próprios para $\lambda = \frac{5+i\sqrt{7}}{2}$ são os que verificam

$$\begin{bmatrix} \frac{1-i\sqrt{7}}{2} & 1 \\ -2 & -\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow b = \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \right) a \ ,$$

portanto, uma base dos vectores próprios para $\lambda = \frac{5+i\sqrt{7}}{2}$ é constituída por

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} .$$

Como A é uma matriz real, os vectores próprios para $\lambda = \frac{5-\sqrt{7}i}{2}$ são os conjugados dos vectores próprios para $\lambda = \frac{5+\sqrt{7}i}{2}$. Logo, uma base dos vectores próprios é constituída por

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} .$$

A matriz de mudança de base é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} .$$

Como

$$A = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5+i\sqrt{7}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-i+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} & \frac{-i}{\sqrt{7}} \\ \frac{i+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} & \frac{i}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} ,$$

a exponencial é, chamando $\lambda_1 = \frac{5+i\sqrt{7}}{2}$ *e* $\lambda_2 = \frac{5-i\sqrt{7}}{2}$,

$$\begin{aligned} e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} & \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-i+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} & \frac{-i}{\sqrt{7}} \\ \frac{i+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} & \frac{i}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\frac{5}{2}t}\cos\frac{t\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{5}{2}t}\sin\frac{t\sqrt{7}}{2} & \frac{2}{\sqrt{7}}e^{\frac{5}{2}t}\sin\frac{t\sqrt{7}}{2} \\ \frac{-4}{\sqrt{7}}e^{\frac{5}{2}t}\sin\frac{t\sqrt{7}}{2} & e^{\frac{5}{2}t}\cos\frac{t\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{\sqrt{7}}e^{\frac{5}{2}t}\sin\frac{t\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

(d) *Os valores próprios de A são as soluções de*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad &\iff \quad -\lambda^3 - \lambda = 0 \\ &\iff \quad \lambda(\lambda^2+1) = 0 \\ &\iff \quad \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \pm i . \end{aligned}$$

Conclui-se que a matriz é diagonalizável e pode-se tomar

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} .$$

Claramente,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um vector próprio de $\lambda = 0$. Os vectores próprios de $\lambda = i$ são os que verificam

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \iff &\begin{cases} -ia = 0 \\ -ib - c = 0 \\ b - ic = 0 \end{cases} \\ \iff &a = 0 \text{ e } c = -ib . \end{aligned}$$

Uma base dos vectores próprios para $\lambda = i$ é dada por

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} .$$

Como A é uma matriz real os vectores próprios associados a $-i$ são os conjugados dos vectores próprios de i. Uma base é então dada por

$$v_3 = \overline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Consequentemente, uma matriz de mudança de base é dada por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{bmatrix} .$$

Como

$$A = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} ,$$

a exponencial é

$$\begin{aligned} e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

(e) *Os valores próprios de A são as soluções de*

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff -\lambda^3 + \lambda - \lambda = 0 \iff \lambda = 0 .$$

Os vectores próprios de $\lambda = 0$ são os que satisfazem a equação

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} b = 0 \\ -a - c = 0 . \end{cases}$$

A dimensão do espaço próprio de 0 é 1 portanto há um único bloco de Jordan. Assim,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Uma base dos vectores próprios associados a $\lambda = 0$ é

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

A segunda coluna, w, da matriz S obtém-se resolvendo a equação

$$(A - 0I)w = v \iff \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Pode-se tomar

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

A terceira coluna, u, da matriz S obtém-se resolvendo a equação

$$(A - 0I)u = w \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pode-se tomar

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, uma matriz de mudança de base é dada por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$A = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a exponencial é

$$\begin{aligned} e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} + 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ -t & 1 & -t \\ -\frac{t^2}{2} & t & 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$