

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC  
EXERCÍCIO-TESTE – 28 DE ABRIL DE 2003

Nº: \_\_\_\_\_ Dia da semana da turma prática: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

duração: meia hora (13:10-13:40)  
cotação: dois valores por alínea  
**apresente e justifique todos os cálculos**

(1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Ache uma forma canónica de Jordan  $J$  e uma matriz de mudança de base  $S$  tais que  $A = SJS^{-1}$ .

**Resolução:** Os valores próprios de  $A$  são as soluções de

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & -6 \\ 0 & 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0,$$

ou seja  $\lambda = 2$  (com multiplicidade algébrica dois) e  $\lambda = 1$ .

Os vectores próprios associados ao valor próprio 2 são os que verificam

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2a = 2a \\ -b - 6c = 2b \\ b + 4c = 2c \end{cases} \iff b = -2c.$$

Os vectores próprios associados ao valor próprio 1 são os que verificam

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2a = a \\ -b - 6c = b \\ b + 4c = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = -3c \end{cases}.$$

Por exemplo,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são linearmente independentes, formando  $v_1$  e  $v_2$  uma base do próprio associado a 2 e  $v_3$  uma base do espaço próprio associado a 1.

(continua)

Conclui-se que a matriz é diagonalizável e pode-se tomar a forma canónica de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz de mudança de base

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

tais que  $A = SJS^{-1}$ . □

(b) Calcule a exponencial  $e^{At}$ .

**Resolução:** Como

$$A = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

a exponencial é

$$\begin{aligned} e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 3e^t - 2e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} \\ 0 & e^{2t} - e^t & 3e^{2t} - 2e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□