Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

EXERCÍCIO-TESTE – 28 DE ABRIL DE 2003

Nº: ______________ **Dia da semana da turma prática:** ______________

Nome: ____

duração: meia hora (13:10-13:40)
cotação: dois valores por alínea
apresente e justifique todos os cálculos

(1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Ache uma forma canónica de Jordan J e uma matriz de mudança de base S tais que $A = SJS^{-1}$.

Resolução: *Os valores próprios de A são as soluções de*

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -6 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \ ,$$

ou seja $\lambda = 2$ (com multiplicidade algébrica dois) e $\lambda = 1$.
Os vectores próprios associados ao valor próprio 2 são os que verificam

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2a = 2a \\ -b - 6c = 2b \\ b + 4c = 2c \end{cases} \iff b = -2c \, .$$

Os vectores próprios associados ao valor próprio 1 são os que verificam

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2a = a \\ -b - 6c = b \\ b + 4c = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = -3c \, . \end{cases}$$

Por exemplo,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

são linearmente independentes, formando v_1 e v_2 um base do próprio associado a 2 e v_3 uma base do espaço próprio associado a 1.

(continua)

Conclui-se que a matriz é diagonalizável e pode-se tomar a forma canónica de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz de mudança de base

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

tais que $A = SJS^{-1}$. $\square$

(b) Calcule a exponencial e^{At}.

Resolução: *Como*

$$A = SJS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

a exponencial é

$$\begin{aligned} e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 3e^{t} - 2e^{2t} & 6e^{t} - 6e^{2t} \\ 0 & e^{2t} - e^{t} & 3e^{2t} - 2e^{t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$