Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 28/4/2003

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

FICHA 5 – EDO'S VECTORIAIS LINEARES E ESCALARES DE ORDEM SUPERIOR

para entregar até à aula teórica de **6ª feira, 9 de Maio**

(1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

(a) Quais são os valores próprios de A?
(b) Quais são os vectores próprios de A?
(c) Determine uma matriz de mudança de base, S, que diagonaliza A, e determine a sua inversa, S^{-1}.
(d) Calcule e^{At}.
(e) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

(f) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} .$$

(g) Escreva duas funções $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que constituam uma base do espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior.

(2) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule e^{At}.
(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(3) Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 + 2y_2 + t \\ \frac{dy_2}{dt} = 2y_1 + 2y_2 . \end{cases}$$

(4) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais escalares:
(a) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 0$;
(b) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 1$;
(c) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = e^{-2t}$;
(d) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 1 + e^{-2t}$.