

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

RESOLUÇÃO DA FICHA 5
EDO'S VECTORIAIS LINEARES E ESCALARES DE ORDEM SUPERIOR

disponível em <http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIV>

(1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

- (a) Quais são os valores próprios de A ?
- (b) Quais são os vectores próprios de A ?
- (c) Determine uma matriz de mudança de base, S , que diagonaliza A , e determine a sua inversa, S^{-1} .
- (d) Calcule e^{At} .
- (e) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

(f) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} .$$

(g) Escreva duas funções $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que constituam uma base do espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior.

Resolução:

(a) *Os valores próprios são os zeros do polinómio característico:*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff (3 - \lambda)^2 - 4 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 5 . \end{aligned}$$

Os valores próprios de A são 1 e 5.

(b) *Os vectores próprios de A associados ao valor próprio 1 satisfazem*

$$(A - I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = -b .$$

Logo, os vectores próprios de A associados ao valor próprio 1 são os vectores da forma

$$v = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a \in \mathbb{R} .$$

Os vectores próprios de A associados ao valor próprio 5 satisfazem

$$(A - 5I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = b .$$

Logo, os vectores próprios de A associados ao valor próprio 5 são os vectores da forma

$$v = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a \in \mathbb{R} .$$

- (c) Mudando para uma base de vectores próprios de A , a transformação linear dada por A fica diagonal. Tome-se, por exemplo, a matriz de mudança de base

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujas primeira e segunda colunas são vectores próprios de A associados aos valores próprios 1 e 5, respectivamente. A mudança inversa é

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

Então tem-se

$$A = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} S^{-1} .$$

- (d) De acordo com a alínea anterior,

$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^t + e^{5t}}{2} & \frac{e^{5t} - e^t}{2} \\ \frac{e^{5t} - e^t}{2} & \frac{e^t + e^{5t}}{2} \end{bmatrix} .$$

- (e) A solução deste problema de valor inicial é

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^t + e^{5t}}{2} & \frac{e^{5t} - e^t}{2} \\ \frac{e^{5t} - e^t}{2} & \frac{e^t + e^{5t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3e^{5t} - e^t}{2} \\ \frac{3e^{5t} + e^t}{2} \end{bmatrix} , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

- (f) A solução geral desta equação diferencial é dada, por exemplo, pela expressão

$$y(t) = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{5t} \\ c_2 e^{5t} - c_1 e^t \end{bmatrix} , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Comentário: A solução acima pode ser escrita

$$y(t) = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} S^{-1} S \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{At} S \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Equivalentemente, poder-se-ia ter respondido que a solução geral é dada por

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } a_1, a_2 \in \mathbb{R} .$$

As colunas de e^{At} formam uma base das soluções da equação dada. Como S é uma matriz invertível, as colunas de $e^{At} S$ também formam uma base das soluções da equação. Optou-se pela expressão $e^{At} S$ porque esta dá uma expressão mais simples para a solução geral. \diamond

- (g) Compõe-se uma base para o espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior, por exemplo, com as colunas da matriz

$$S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & e^{5t} \end{bmatrix} ,$$

ou seja, com as funções $Y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $Y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$Y_1(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y_2(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} .$$

De facto, $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ são funções linearmente independentes, são soluções da equação da alínea anterior e qualquer outra solução $y(t)$ é da forma $y(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t)$ para algum $c_1 \in \mathbb{R}$ e algum $c_2 \in \mathbb{R}$.

□

(2) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule e^{At} .

(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

(a) Os valores próprios da matriz são as soluções de

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (-1 - \lambda)^2 + 1 = 0 \\ &\iff \lambda = -1 \pm i. \end{aligned}$$

Os vectores próprios associados a $-1 + i$ são os vectores que verificam

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff ia = b.$$

Uma base do espaço próprio de $-1 + i$ é constituída pelo vector $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

Os vectores próprios associados a $-1 - i$ são os vectores conjugados dos vectores próprios associados a $-1 + i$. (De facto, se λ e $\bar{\lambda}$ são valores próprios complexos conjugados de uma matriz real A , então $(A - \lambda I)v = 0 \iff (A - \bar{\lambda} I)\bar{v} = 0$.) Uma

base do espaço próprio de $-1 - i$ é constituída pelo vector $v_2 = \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$.

Logo, uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} -1 + i & 0 \\ 0 & -1 - i \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_S \underbrace{\begin{bmatrix} e^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-i)t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comentário: Apesar do método de resolução envolver complexos, a resposta tinha que ser real, pois a matriz dada é real e a exponencial de uma matriz real é real. \diamond

(b) Em termos de

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix},$$

este problema de valor inicial escreve-se

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + b(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

A solução é dada, por exemplo, pela fórmula de variação das constantes:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s) ds \\ &= 0 + \int_0^t e^{-(t-s)} \begin{bmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(t-s) \\ -\sin(t-s) \end{bmatrix} ds \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \int_0^t \cos(t-s) ds \\ -\int_0^t \sin(t-s) ds \end{bmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conclui-se que a solução é

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \sin t \\ e^{-t}(\cos t - 1) \end{bmatrix}.$$

□

(3) Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 + 2y_2 + t \\ \frac{dy_2}{dt} = 2y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Resolução: Este sistema fica mais simples se for traduzido nas incógnitas $x_1 = y_1 - y_2$ e $x_2 = y_1 + y_2$. Como

$$\begin{cases} \dot{y}_1 - \dot{y}_2 = t \\ \dot{y}_1 + \dot{y}_2 = 4(y_1 + y_2) + t, \end{cases}$$

as novas funções satisfazem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = t \\ \dot{x}_2 = 4x_2 + t. \end{cases}$$

A solução geral da primeira equação é

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} + c_1$$

onde c_1 é uma constante real arbitrária. A segunda equação admite o factor de integração e^{-4t} e resolve-se como se segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = 4x_2 + t &\iff e^{-4t}\dot{x}_2 - 4e^{-4t}x_2 = te^{-4t} \\ &\iff \frac{d}{dt}(e^{-4t}x_2) = te^{-4t} \\ &\iff e^{-4t}x_2 = \int te^{-4t} dt + c_2 \\ &\iff x_2(t) = e^{4t} \left(-\frac{t}{4}e^{-4t} - \frac{1}{16}e^{-4t} + c_2 \right) \\ &\iff x_2(t) = -\frac{t}{4} - \frac{1}{16} + c_2e^{4t} \end{aligned}$$

onde c_2 é uma constante real arbitrária. Como $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ e $y_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$, conclui-se que a solução geral pedida é

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{t^2}{4} + k_1 - \frac{t}{8} - \frac{1}{32} + k_2e^{4t} \\ y_2(t) = -\frac{t}{8} - \frac{1}{32} + k_2e^{4t} - \frac{t^2}{4} - k_1. \end{cases}$$

onde $k_1 = \frac{c_1}{2}$ e $k_2 = \frac{c_2}{2}$ são constantes reais arbitrárias. □

Comentário: Em alternativa, poder-se-ia ter aplicado a fórmula de variação das constantes ao sistema original. ◇

(4) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais escalares:

- (a) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 0$;
- (b) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 1$;
- (c) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = e^{-2t}$;
- (d) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 1 + e^{-2t}$.

Resolução:

(a) Esta equação pode ser escrita

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0$$

onde $D = \frac{d}{dt}$ é o operador de derivação em ordem a t . Como $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$ tem apenas a raiz -2 com multiplicidade 2, conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Esta equação pode ser escrita

$$(D^2 + 4D + 4)y = 1. \quad (\star)$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Para encontrar uma solução particular, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de 1 é D . A equação homogénea auxiliar $D(D^2 + 4D + 4)y = 0$ tem solução geral $a_1 + a_2e^{-2t} + a_3te^{-2t}$. Como a família $a_2e^{-2t} + a_3te^{-2t}$ é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada a (\star) , estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de (\star) . Vai-se então determinar a constante a_1 , substituindo-a na equação (\star) e impondo que seja uma solução

particular:

$$(D^2 + 4D + 4)a_1 = 1 \iff 4a_1 = 1 \iff a_1 = \frac{1}{4}.$$

Conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{4}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Esta equação pode ser escrita

$$(D^2 + 4D + 4)y = e^{-2t}. \quad (**)$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Para encontrar uma solução particular, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de e^{-2t} é $D+2$. A equação homogénea auxiliar $(D+2)(D^2+4D+4)y = 0$, que é equivalente a $(D+2)^3 y = 0$, tem solução geral $a_1 e^{-2t} + a_2 t e^{-2t} + a_3 t^2 e^{-2t}$. Como a família $a_1 e^{-2t} + a_2 t e^{-2t}$ é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada a (**), estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de (**). Vai-se então determinar a constante a_3 , substituindo $a_3 t^2 e^{-2t}$ na equação (**) e impondo que seja uma solução particular:

$$\begin{aligned} & (D^2 + 4D + 4)(a_3 t^2 e^{-2t}) = e^{-2t} \\ \iff & (4a_3 t^2 e^{-2t} - 8a_3 t e^{-2t} + 2a_3 e^{-2t}) + 4(-2a_3 t^2 e^{-2t} + 2a_3 t e^{-2t}) + 4a_3 t^2 e^{-2t} = e^{-2t} \\ \iff & \begin{cases} 4a_3 - 8a_3 + 4a_3 = 0 \\ -8a_3 + 8a_3 = 0 \\ 2a_3 = 1 \end{cases} \iff a_3 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

onde o sistema de equações para a_3 foi obtido igualando os coeficientes de $t^2 e^{-2t}$, $t e^{-2t}$ e e^{-2t} nos membros esquerdo e direito. Conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-2t}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(d) Esta equação pode ser escrita

$$(D^2 + 4D + 4)y = 1 + e^{-2t}.$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Encontra-se uma solução particular somando as soluções particulares determinadas nas alíneas (b) e (c), as quais correspondem a cada uma das parcelas do membro direito da equação. Conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} t^2 e^{-2t}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Comentário: Em alternativa, na alínea (d) poder-se-ia ter aplicado o método dos coeficientes indeterminados para calcular uma solução particular, notando que o aniquilador da soma $1 + e^{-2t}$ é a composição dos aniquiladores de 1 e de e^{-2t} , ou seja, é $D(D+2)$. ◇