Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 9/5/2003

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

RESOLUÇÃO DA FICHA 5
EDO'S VECTORIAIS LINEARES E ESCALARES DE ORDEM SUPERIOR

disponível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIV`

(1) Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

(a) Quais são os valores próprios de A?
(b) Quais são os vectores próprios de A?
(c) Determine uma matriz de mudança de base, S, que diagonaliza A, e determine a sua inversa, S^{-1}.
(d) Calcule e^{At}.
(e) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$
(f) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} .$$
(g) Escreva duas funções $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que constituam uma base do espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior.

Resolução:

(a) *Os valores próprios são os zeros do polinómio característico:*
$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 \quad &\iff \quad (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \\ &\iff \quad \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \\ &\iff \quad \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 5 . \end{aligned}$$
Os valores próprios de A são 1 e 5.

(b) *Os vectores próprios de A associados ao valor próprio 1 satisfazem*
$$(A - I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = -b .$$
Logo, os vectores próprios de A associados ao valor próprio 1 são os vectores da forma
$$v = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad a \in \mathbb{R} .$$
Os vectores próprios de A associados ao valor próprio 5 satisfazem
$$(A - 5I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = b .$$

Logo, os vectores próprios de A associados ao valor próprio 5 são os vectores da forma

$$v = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad a \in \mathbb{R} \ .$$

(c) *Mudando para uma base de vectores próprios de A, a transformação linear dada por A fica diagonal. Tome-se, por exemplo, a matriz de mudança de base*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujas primeira e segunda colunas são vectores próprios de A associados aos valores próprios 1 e 5, respectivamente. A mudança inversa é

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \ .$$

Então tem-se

$$A = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} S^{-1} \ .$$

(d) *De acordo com a alínea anterior,*

$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^t+e^{5t}}{2} & \frac{e^{5t}-e^t}{2} \\ \frac{e^{5t}-e^t}{2} & \frac{e^t+e^{5t}}{2} \end{bmatrix} \ .$$

(e) *A solução deste problema de valor inicial é*

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^t+e^{5t}}{2} & \frac{e^{5t}-e^t}{2} \\ \frac{e^{5t}-e^t}{2} & \frac{e^t+e^{5t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3e^{5t}-e^t}{2} \\ \frac{3e^{5t}+e^t}{2} \end{bmatrix} \ , \ \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(f) *A solução geral desta equação diferencial é dada, por exemplo, pela expressão*

$$y(t) = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{5t} \\ c_2 e^{5t} - c_1 e^t \end{bmatrix} \ , \ \forall t \in \mathbb{R} \ \text{ onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Comentário: *A solução acima pode ser escrita*

$$y(t) = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} S^{-1} S \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{At} S \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \ , \ \forall t \in \mathbb{R} \ \text{ onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Equivalentemente, poder-se-ia ter respondido que a solução geral é dada por

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \ , \ \forall t \in \mathbb{R} \ \text{ onde } a_1, a_2 \in \mathbb{R} \ .$$

As colunas de e^{At} formam uma base das soluções da equação dada. Como S é uma matriz invertível, as colunas de $e^{At}S$ também formam uma base das soluções da equação. Optou-se pela expressão $e^{At}S$ porque esta dá uma expressão mais simples para a solução geral. $\diamondsuit$

(g) *Compõe-se uma base para o espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior, por exemplo, com as colunas da matriz*

$$S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & e^{5t} \end{bmatrix} \ ,$$

ou seja, com as funções $Y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $Y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$Y_1(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad Y_2(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} \ .$$

De facto, $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ são funções linearmente independentes, são soluções da equação da alínea anterior e qualquer outra solução $y(t)$ é da forma $y(t) = c_1Y_1(t) + c_2Y_2(t)$ para algum $c_1 \in \mathbb{R}$ e algum $c_2 \in \mathbb{R}$.

$\square$

(2) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule e^{At}.

(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Resolução:

(a) *Os valores próprios da matriz são as soluções de*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (-1-\lambda)^2 + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda = -1 \pm i \ . \end{aligned}$$

Os vectores próprios associados a $-1+i$ são os vectores que verificam

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad ia = b \ .$$

Uma base do espaço próprio de $-1+i$ é constituída pelo vector $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

Os vectores próprios associados a $-1-i$ são os vectores conjugados dos vectores próprios associados a $-1+i$. (De facto, se λ e $\overline{\lambda}$ são valores próprios complexos conjugados de uma matriz real A, então $(A-\lambda I)v = 0 \iff (A - \overline{\lambda} I)\overline{v} = 0$.) Uma base do espaço próprio de $-1-i$ é constituída pelo vector $v_2 = \overline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$.

Logo, uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

Conclui-se que

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-i)t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Comentário: *Apesar do método de resolução envolver complexos, a resposta tinha que ser real, pois a matriz dada é real e a exponencial de uma matriz real é real.* $\diamondsuit$

(b) *Em termos de*

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \qquad y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e \qquad b(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix},$$

este problema de valor inicial escreve-se

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + b(t) \\ y(0) = y_0 \ . \end{cases}$$

A solução é dada, por exemplo, pela fórmula de variação das constantes:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)\,ds \\ &= 0 + \int_0^t e^{-(t-s)} \begin{bmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(t-s) \\ -\sin(t-s) \end{bmatrix} ds \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \int_0^t \cos(t-s)\,ds \\ -\int_0^t \sin(t-s)\,ds \end{bmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Conclui-se que a solução é

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\sin t \\ e^{-t}(\cos t - 1) \end{bmatrix} .$$

$\square$

(3) Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} &= 2y_1 + 2y_2 + t \\ \frac{dy_2}{dt} &= 2y_1 + 2y_2 \ . \end{cases}$$

Resolução: *Este sistema fica mais simples se for traduzido nas incógnitas* $x_1 = y_1 - y_2$ *e* $x_2 = y_1 + y_2$. *Como*

$$\begin{cases} \dot{y_1} - \dot{y_2} &= t \\ \dot{y_1} + \dot{y_2} &= 4(y_1 + y_2) + t \ , \end{cases}$$

as novas funções satisfazem

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= t \\ \dot{x_2} &= 4x_2 + t \ . \end{cases}$$

A solução geral da primeira equação é

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} + c_1$$

onde c_1 é uma constante real arbitrária. A segunda equação admite o factor de integração e^{-4t} e resolve-se como se segue:

$$\begin{aligned} \dot{x_2} = 4x_2 + t \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{-4t}\dot{x_2} - 4e^{-4t}x_2 = te^{-4t} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{-4t}x_2\right) = te^{-4t} \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{-4t}x_2 = \int te^{-4t}\,dt + c_2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_2(t) = e^{4t}\left(-\frac{t}{4}e^{-4t} - \frac{1}{16}e^{-4t} + c_2\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad x_2(t) = -\frac{t}{4} - \frac{1}{16} + c_2e^{4t} \end{aligned}$$

onde c_2 é uma constante real arbitrária. Como $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ e $y_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$, conclui-se que a solução geral pedida é

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1(t) &=& \frac{t^2}{4} + k_1 - \frac{t}{8} - \frac{1}{32} + k_2e^{4t} \\ y_2(t) &=& -\frac{t}{8} - \frac{1}{32} + k_2e^{4t} - \frac{t^2}{4} - k_1 \ . \end{array} \right.$$

onde $k_1 = \frac{c_1}{2}$ e $k_2 = \frac{c_2}{2}$ são constantes reais arbitrárias. □

Comentário: *Em alternativa, poder-se-ia ter aplicado a fórmula de variação das constantes ao sistema original.* ♢

(4) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais escalares:
(a) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 0$;
(b) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 1$;
(c) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = e^{-2t}$;
(d) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 1 + e^{-2t}$.

Resolução:

(a) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0$$

onde $D = \frac{d}{dt}$ é o operador de derivação em ordem a t. Como $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$ tem apenas a raiz -2 com multiplicidade 2, conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

(b) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^2 + 4D + 4)y = 1 \ . \qquad (\star)$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Para encontrar uma solução particular, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de 1 é D. A equação homogénea auxiliar $D(D^2 + 4D + 4)y = 0$ tem solução geral $a_1 + a_2e^{-2t} + a_3te^{-2t}$. Como a família $a_2e^{-2t} + a_3te^{-2t}$ é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada a $(\star)$, estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de $(\star)$. Vai-se então determinar a constante a_1, substituindo-a na equação $(\star)$ e impondo que seja uma solução *particular:*

$$(D^2+4D+4)a_1 = 1 \iff 4a_1 = 1 \iff a_1 = \frac{1}{4} \; .$$

Conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + \frac{1}{4} \; , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \textit{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \; .$$

(c) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^2+4D+4)y = e^{-2t} \; . \qquad (\star\star)$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Para encontrar uma solução particular, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de e^{-2t} *é* $D+2$*. A equação homogénea auxiliar* $(D+2)(D^2+4D+4)y = 0$*, que é equivalente a* $(D+2)^3y = 0$*, tem solução geral* $a_1e^{-2t} + a_2te^{-2t} + a_3t^2e^{-2t}$*. Como a família* $a_1e^{-2t}+a_2te^{-2t}$ *é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada a* $(\star\star)$*, estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de* $(\star\star)$*. Vai-se então determinar a constante* a_3*, substituindo* $a_3t^2e^{-2t}$ *na equação* $(\star\star)$ *e impondo que seja uma solução particular:*

$$\begin{aligned}
& (D^2+4D+4)(a_3t^2e^{-2t}) = e^{-2t} \\
\iff \quad & (4a_3t^2e^{-2t} - 8a_3te^{-2t} + 2a_3e^{-2t}) + 4(-2a_3t^2e^{-2t} + 2a_3te^{-2t}) + 4a_3t^2e^{-2t} = e^{-2t} \\
\iff \quad & \begin{cases} 4a_3 - 8a_3 + 4a_3 = 0 \\ -8a_3 + 8a_3 = 0 \\ 2a_3 = 1 \end{cases} \qquad \iff \qquad a_3 = \frac{1}{2} \; ,
\end{aligned}$$

onde o sistema de equações para a_3 *foi obtido igualando os coeficientes de* t^2e^{-2t}*,* te^{-2t} *e* e^{-2t} *nos membros esquerdo e direito. Conclui-se que a solução geral é*

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + \frac{1}{2}t^2e^{-2t} \; , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \textit{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \; .$$

(d) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^2+4D+4)y = 1 + e^{-2t} \; .$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Encontra-se uma solução particular somando as soluções particulares determinadas nas alíneas (b) e (c), as quais correspondem a cada uma das parcelas do membro direito da equação. Conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t^2e^{-2t} \; , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \textit{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \; .$$

$\square$

Comentário: *Em alternativa, na alínea (d) poder-se-ia ter aplicado o método dos coeficientes indeterminados para calcular uma solução particular, notando que o aniquilador da soma* $1+e^{-2t}$ *é a composição dos aniquiladores de* 1 *e de* e^{-2t}*, ou seja, é* $D(D+2)$*.* $\diamondsuit$