Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 30/5/2003

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

RESOLUÇÃO DA FICHA 6
EDO'S DE ORDEM > 1 E TRANSFORMADA DE LAPLACE

disponível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIV`

(1) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5\dot{y} = e^{2t}\cos t \\ y(0) = \dot{y}(0) = 0\ ,\ y^{(2)}(0) = 1\ . \end{cases}$$

Resolução: *A equação diferencial pode ser escrita*

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = e^{2t}\cos t\ . \qquad (\star)$$

A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = 0\ . \qquad (\star)_H$$

Como $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$ *tem as raízes simples 0,* $2+i$ *e* $2-i$*, a solução geral complexa da equação homogénea associada* $(\star)_H$ *é*

$$a_1 + a_2 e^{(2+i)t} + a_3 e^{(2-i)t}\ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \textit{onde } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}\ .$$

enquanto que a solução geral real de $(\star)_H$ *é*

$$y_H(t) = c_1 + c_2 e^{2t}\cos t + c_3 e^{2t}\sin t\ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \textit{onde } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\ .$$

Para encontrar uma solução particular de $(\star)$*, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de* $e^{2t}\cos t$ *é* $(D-2)^2+1$*. A equação homogénea auxiliar* $[(D-2)^2+1](D^3-4D^2+5D)y = 0$*, que é equivalente a* $D(D-2-i)^2(D-2+i)^2y = 0$*, tem solução geral real*

$$b_1 + b_2 e^{2t}\cos t + b_3 e^{2t}\sin t + b_4 te^{2t}\cos t + b_5 te^{2t}\sin t\ .$$

Como a família $b_1 + b_2 e^{2t}\cos t + b_3 e^{2t}\sin t$ *é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada, estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de* $(\star)$*. Vai-se então determinar as constantes* b_4 *e* b_5*, substituindo* $b_4 te^{2t}\cos t + b_5 te^{2t}\sin t$ *na equação* $(\star)$ *e impondo que seja uma solução particular:*

$$\begin{aligned} & (D^3 - 4D^2 + 5D)(b_4 te^{2t}\cos t + b_5 te^{2t}\sin t) = e^{2t}\cos t \\ \Longleftrightarrow\quad & (-2b_4 + 4b_5)\cdot e^{2t}\cos t + (-4b_4 - 2b_5)\cdot e^{2t}\sin t + 0\cdot te^{2t}\cos t + 0\cdot te^{2t}\sin t = e^{2t}\cos t \\ \Longleftrightarrow\quad & \begin{cases} -2b_4 + 4b_5 = 1 \\ -4b_4 - 2b_5 = 0 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} b_4 = -\frac{1}{10} \\ b_5 = \frac{1}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

onde o sistema de equações para b_4 *e* b_5 *foi obtido igualando os coeficientes de* $e^{2t}\cos t$ *e* $e^{2t}\sin t$ *nos membros esquerdo e direito. Logo, uma solução particular de* $(\star)$ *é*

$$y_P(t) = -\frac{1}{10}te^{2t}\cos t + \frac{1}{5}te^{2t}\sin t\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}\ .$$

Conclui-se que a solução geral de $(\star)$ *é*

$$y(t) = \underbrace{c_1 + c_2 e^{2t}\cos t + c_3 e^{2t}\sin t}_{y_H(t)} \underbrace{- \frac{1}{10} t e^{2t}\cos t + \frac{1}{5} t e^{2t}\sin t}_{y_P(t)} ,$$

para todo o t *em* $\mathbb{R}$ *onde* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Para achar a solução particular que satisfaz as condições iniciais dadas, calcula-se a primeira e a segunda derivadas da solução geral:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= c_2 e^{2t}(2\cos t - \sin t) + c_3 e^{2t}(2\sin t + \cos t) \\ &\quad - \frac{1}{10} e^{2t}\cos t - \frac{1}{10} t e^{2t}(2\cos t - \sin t) \\ &\quad + \frac{1}{5} e^{2t}\sin t + \frac{1}{5} t e^{2t}(2\sin t + \cos t) \\ y^{(2)}(t) &= c_2 e^{2t}(3\cos t - 4\sin t) + c_3 e^{2t}(3\sin t + 4\cos t) \\ &\quad - \frac{1}{10} e^{2t}(4\cos t - 2\sin t) - \frac{1}{10} t e^{2t}(3\cos t - 4\sin t) \\ &\quad + \frac{1}{5} e^{2t}(4\sin t + 2\cos t) + \frac{1}{5} t e^{2t}(3\sin t + 4\cos t) \end{aligned}$$

e impõe-se as condições:

$$\begin{cases} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ \dot{y}(0) &= 2c_2 + c_3 - \frac{1}{10} = 0 \\ y^{(2)}(0) &= 3c_2 + 4c_3 - \frac{4}{10} + \frac{2}{5} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \frac{3}{25} \\ c_2 = -\frac{3}{25} \\ c_3 = \frac{17}{50} \end{cases} .$$

Portanto a resposta é

$$y(t) = \frac{3}{25} - \frac{3}{25} e^{2t}\cos t + \frac{17}{50} e^{2t}\sin t - \frac{1}{10} t e^{2t}\cos t + \frac{1}{5} t e^{2t}\sin t \ , \ \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

□

(2) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} t y^{(3)} + y^{(2)} = 2t \\ y(1) = \frac{1}{6} \ , \ \dot{y}(1) = y^{(2)}(1) = 1 \ . \end{cases}$$

Sugestão: Faça a substituição $v = y^{(2)}$.

Resolução: *Seguindo a sugestão, em termos de* $v = y^{(2)}$ *a equação diferencial fica*

$$t\dot{v} + v = 2t \iff \frac{d}{dt}(tv) = 2t \iff tv = t^2 + c_0 \ ,$$

pelo que, para $t \neq 0$, *fica* $v(t) = t + \frac{c_0}{t}$. *Impondo a condição incial* $v(1) = y^{(2)}(1) = 1$, *obtém-se que* $1 = 1 + c_0$, *ou seja,* $c_0 = 0$. *Então:*

$$v(t) = t \iff y^{(2)}(t) = t \iff v(t) = \frac{t^3}{6} + c_1 t + c_2 \ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ ,$$

onde na útima passagem se primitivou duas vezes em t. *Impondo as restantes condições iniciais, obtém-se*

$$\begin{cases} y(1) = \frac{1}{6} + c_1 + c_2 = \frac{1}{6} \\ \dot{y}(1) = \frac{1}{2} + c_1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = -\frac{1}{2} \ . \end{cases}$$

Conclui-se que a solução é

$$y(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} , \qquad \forall t \in \mathbb{R} .$$

(Verifica-se que o intervalo de definição é $\mathbb{R}$ substituindo na equação.) $\square$

Comentário: *A condição inicial $y^{(2)}(1) = 1$ podia ter sido imposta mais tarde, ao mesmo tempo que as condições para $y(1)$ e $\dot{y}(1)$, tendo nesse caso que se trabalhar com a constante c_0 até impôr todas as condições.* $\diamondsuit$

Em cada um dos seguintes problemas, aplique a **transformada de Laplace** para encontrar uma função contínua $y(t)$ definida para $t \geq 0$ que satisfaça a equação diferencial em todos os pontos nos quais o termo independente é contínuo.

(3) Determine a solução do problema de valor inicial

$$y^{(2)} - 3\dot{y} + 2y = f(t) , \qquad y(0) = 0 , \qquad \dot{y}(0) = 0$$

onde $f(t)$ é definida pela expressão

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{se } 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

Resolução: *Em termos da função de Heaviside, $f(t)$ escreve-se $f(t) = H_0(t) - H_1(t) + H_2(t) - H_3(t)$. Portanto a transformada de Laplace de $f(t)$ é*

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} .$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação obtém-se

$$\begin{aligned} & (s^2 - 3s + 2)Y(s) = F(s) \\ \iff \quad & Y(s) = \frac{1}{s(s-1)(s-2)} \left(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s}\right) \\ \iff \quad & Y(s) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-2}\right) \left(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s}\right) . \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-2} ,$$

conclui-se que

$$\begin{aligned} y(t) \quad = \quad & \left(\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right) - H_1(t)\left(\frac{1}{2} - e^{t-1} + \frac{1}{2}e^{2(t-1)}\right) \\ & + H_2(t)\left(\frac{1}{2} - e^{t-2} + \frac{1}{2}e^{2(t-2)}\right) - H_3(t)\left(\frac{1}{2} - e^{t-3} + \frac{1}{2}e^{2(t-3)}\right) . \end{aligned}$$

$\square$

(4) Determine a solução do problema de valor inicial

$$y^{(2)} + y = f(t) \ , \qquad y(0) = 0 \ , \qquad \dot{y}(0) = 0$$

onde $f(t)$ é definida pela expressão

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{se } t \geq 1 \ . \end{cases}$$

Resolução: *Em termos da função de Heaviside, escreve-se* $f(t) = t^2 - H_1(t)t^2 = t^2 - H_1(t)((t-1)^2 + 2(t-1) + 1)$. *Assim, aplicando a transformada de Laplace, obtém-se*

$$\begin{aligned} & (s^2+1)Y(s) = \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & Y(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s} + \frac{2s}{s^2+1} - e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s-2}{s^2+1}\right) \ . \end{aligned}$$

Logo, a solução é

$$y(t) = t^2 - 2 + 2\cos t - \left(t^2 - 2 + \cos(t-1) - 2\sin(t-1)\right) H_1(t) \ .$$

$\square$

(5) Determine a solução do problema de valor inicial

$$y^{(2)} + 2\dot{y} + y = e^{-t} + 3\delta_3(t) \ , \qquad y(0) = 0 \ , \qquad \dot{y}(0) = 3 \ .$$

Resolução: *Aplicando a transformada de Laplace à equação, obtém-se*

$$\begin{aligned} & s^2Y(s) - 3 + 2sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s+1} + 3e^{-3s} \\ \Longleftrightarrow \quad & Y(s) = \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{3e^{-3s}}{(s+1)^2} \ , \end{aligned}$$

pelo que

$$y(t) = 3te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} + 3(t-3)H_3(t)e^{-(t-3)} \ .$$

$\square$