Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 24/2/2003

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

LEEC – PRIMAVERA 2003 – EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

ANÁLISE COMPLEXA

(1) Calcule $\sqrt{i}$, $\sqrt[3]{i}$ e $\sqrt[4]{i}$ e represente estes números geometricamente.

Resolução: *As coordenadas polares de i são $|i| = 1$ e $\arg i = \frac{\pi}{2}$, logo, em termos da exponencial complexa, $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$. O símbolo $\sqrt[n]{i}$ representa o conjunto dos números da forma*

$$e^{\frac{(1+4k)\pi}{2n}i} , \qquad \text{com } k = 0, 1, \ldots , n-1 .$$

Deduz-se que $\sqrt{i}$ simboliza

$$e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i ,$$

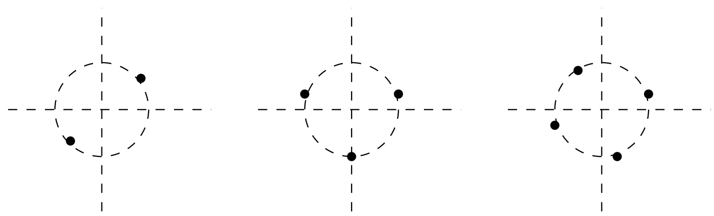
$\sqrt[3]{i}$ simboliza

$$e^{\frac{\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i , \qquad e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i ,$$

e $\sqrt[4]{i}$ simboliza

$$e^{\frac{\pi}{8}i} , \qquad e^{\frac{5\pi}{8}i} , \qquad e^{\frac{9\pi}{8}i} \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{13\pi}{8}i} .$$

Os números $\sqrt{i}$, $\sqrt[3]{i}$ e $\sqrt[4]{i}$ têm o seguinte aspecto geométrico, onde a circunferência tracejada tem raio 1.



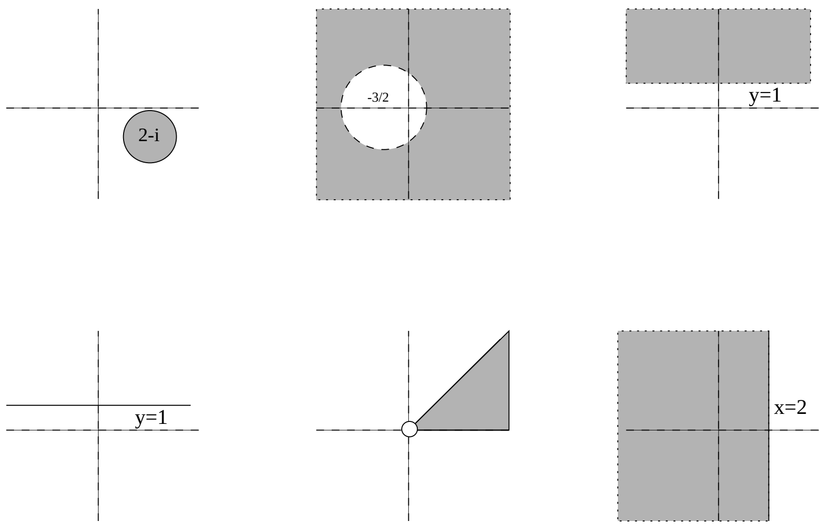
$\sqrt{i}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{i}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{i}$

$\square$

(2) Esboce os seguintes conjuntos e diga quais deles são regiões:
(a) $|z - 2 + i| \leq 1$;
(b) $|2z + 3| > 4$;
(c) $\operatorname{Im} z > 1$;
(d) $\operatorname{Im} z = 1$;
(e) $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ $\quad (z \neq 0)$;
(f) $|z - 4| \geq |z|$.

Resolução: *Os conjuntos (b) e (c) são regiões (i.e., são abertos conexos e não-vazios).*

(a) *(b)* *(c)*



(d) *(e)* *(f)*

$\square$

(3) Resolva a seguinte equação

$$1 + 3z + 3z^2 + z^3 = 3\sqrt{3}\left(e^{-i\pi} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \ .$$

Resolução: *Simplificando a equação, obtém-se*

$$(1+z)^3 = 3\sqrt{3}(-i) \ ,$$

ou seja,

$$(1+z)^3 = (\sqrt{3})^3 e^{i\frac{3\pi}{2}} \ .$$

As soluções da equação são da forma $z = -1 + \sqrt{3}e^{i\frac{3\pi+4k\pi}{6}}$*, com* $k \in \{0,1,2\}$*, ou seja, são*

$$z = -1 + \sqrt{3}i \qquad \text{ou} \qquad z = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{ou} \qquad z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \ .$$

$\square$

(4) Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$.
(a) Mostre que u é harmónica.

(b) Exiba uma função $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

seja analítica e satisfaça $f(0) = 0$.

Resolução:
(a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0 \ .$$

(b) *Para que f seja analítica em $\mathbb{C}$, a função v tem que ser tal que o par u, v satisfaça as equações de Cauchy-Riemann:*

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} &= 6xy \\ \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 \ . \end{cases}$$

Primitivando cada uma das duas equações, obtém-se

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int (6xy)\ dx &= 3x^2 y + F(y) \qquad \text{e} \\ v(x,y) &= \int (3x^2 - 3y^2)\ dy &= 3x^2 y - y^3 + G(x)\ , \end{aligned}$$

onde F, G são funções correspondentes às constantes de integração. Compatibilizando as duas condições, conclui-se que,

$$v(x,y) = 3x^2 y - y^3 + c$$

onde c é uma constante complexa arbitrária. Escolhe-se $c = 0$, de maneira que $v(0,0) = 0$. Conclui-se que, se se tomar $v(x,y) = 3x^2y - y^3$, a função definida por $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica (porque u e v têm derivadas parciais contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}$) e além disso $f(0) = 0$.

□

(5) Estude a analiticidade de $f(z) = |y| - ix$ para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e calcule $f'(e^{i\frac{\pi}{6}})$.

Resolução: *Para $z = x+iy$, tem-se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \begin{cases} y - ix\ , & \text{se } y \geq 0 \\ -y - ix\ , & \text{se } y < 0 \end{cases}$.*
A parte real não é diferenciável em $y = 0$. As equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas se $y > 0$ pois aí

$$\begin{cases} \frac{\partial(y)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial(-x)}{\partial x} \\ \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1 = -\frac{\partial(y)}{\partial y} \end{cases},$$

e violadas se $y < 0$ onde

$$\begin{cases} \frac{\partial(-y)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial(-x)}{\partial x} \\ \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1 \neq 1 = -\frac{\partial(-y)}{\partial y} \end{cases}.$$

Logo, f é analítica exactamente no aberto $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > 0\}$.
Como $f(z) = -iz$ para $\mathrm{Im}\ z \geq 0$, tem-se $f'(z) = -i$ para $\mathrm{Im}\ z \geq 0$ e em particular $f'(e^{i\frac{\pi}{6}}) = -i$.

□

Comentário: *Para calcular $f'(z_0)$, com $z_0 = x_0 + iy_0$ um ponto onde f é diferenciável, poder-se-ia ter usado uma das fórmulas alternativas*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad \text{etc.}$$

$\diamondsuit$

(6) Exprima $\cos 3\varphi$ e $\sin 4\varphi$ em termos de $\cos\varphi$ e $\sin\varphi$.

Resolução: *Para um ângulo φ real, temos*

$$(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = e^{3\varphi i} = (e^{\varphi i})^3 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 \ .$$

Como

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi \ ,$$

extraindo as partes imaginárias, obtém-se

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi \ .$$

Temos $(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = e^{4\varphi i} = (e^{\varphi i})^4 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^4$. *Como*

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 \quad &= \quad \cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi \\ &\quad\; -6\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 4i\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi \ ,\end{aligned}$$

extraindo as partes reais, obtém-se

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi \ .$$

$\square$

(7) Mostre que, para $z = x + yi$, se tem

$$|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x \ .$$

Resolução: *Para $z = x + yi$, tem-se*

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 &= \cos z \cdot \overline{\cos z} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{-i\overline{z}} + e^{i\overline{z}}}{2} \\
&= \frac{e^{i(z-\overline{z})} + e^{i(z+\overline{z})} + e^{-i(z+\overline{z})} + e^{-i(z-\overline{z})}}{4} \\
&= \frac{e^{-2y} + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{2y}}{4} \\
\sinh^2 y &= \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{4} \\
\cos^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} + 2}{4} \\
\cosh^2 y &= \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2}{4} \\
\sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2}{4}
\end{aligned}$$

donde se verifica o resultado. □

(8) Escreva todos os valores de i^i na forma $a + bi$.

Resolução: *O símbolo i^i representa o conjunto dos números complexos s que têm logaritmo da forma $i\alpha$, para algum logaritmo α de i. Os logaritmos de i são as soluções da equação $e^\alpha = i$, ou seja, são os números da forma $\alpha = \ln|i| + (\arg i + 2k\pi)i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, são*

$$\alpha = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i \ , \qquad k \in \mathbb{Z} \ .$$

Conclui-se que os números $e^{i\alpha}$ que formam o conjunto i^i são os seguintes números reais

$$e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi} \ , \qquad k \in \mathbb{Z} \ .$$

□

(9) Para cada um dos seguintes conjuntos $Z \subset \mathbb{C}$, esboce o conjunto

$$W = \{w \in \mathbb{C} : e^w \in Z\}$$

dos seus logaritmos.

(a) $Z = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0, \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$;
(b) $Z = \mathbb{R}$;
(c) $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| = e, \ \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}\}$.

Resolução: *Como, para $z \neq 0$, os logaritmos de z são dados por*

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ ,$$

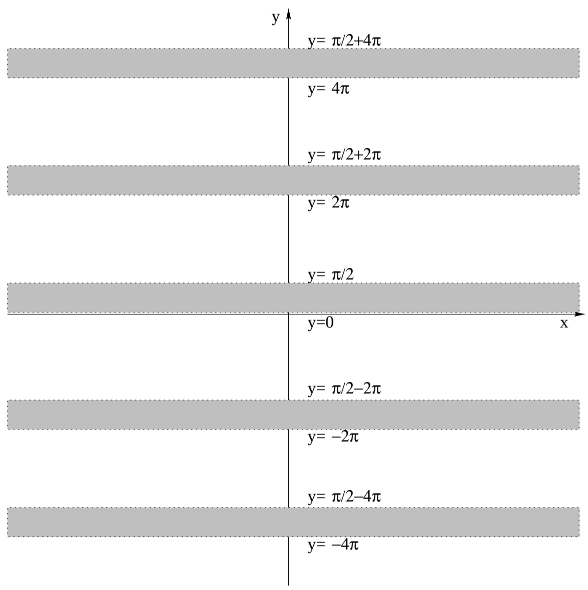
os conjuntos W são da forma

$$W = \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z} \text{ e } z \in Z \setminus \{0\}\} \ .$$

(a)

$$\begin{aligned} W &= \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z} \ , \ \operatorname{Re} z > 0 \ \operatorname{Im} z > 0 \ \} \\ &= \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z} \ , \ |z| > 0 \ , \ \arg z \in]0, \pi/2[\ \} \\ &= \{x + i \underbrace{(\theta + 2k\pi)}_{y} : k \in \mathbb{Z} \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \ \theta \in]0, \pi/2[\ \} \ . \end{aligned}$$

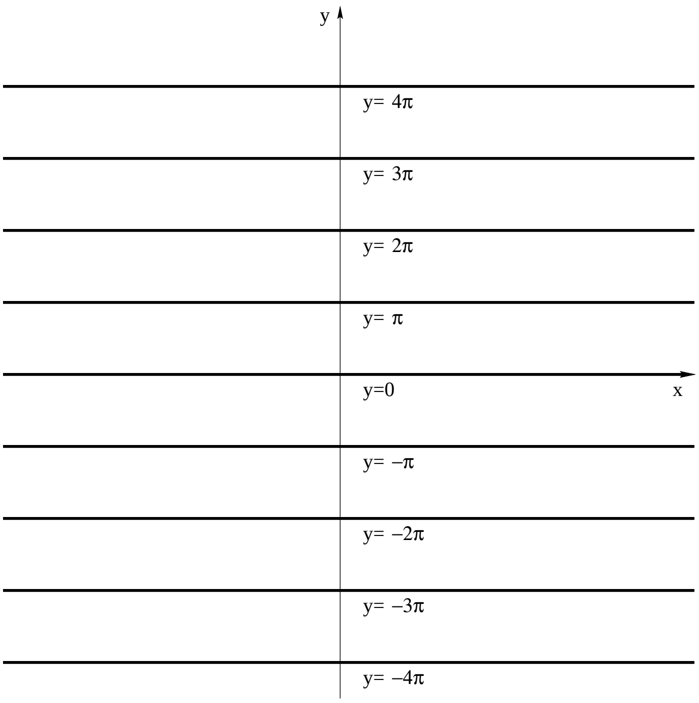
Portanto o esboço do conjunto W é:



(b) *Tendo em conta que 0 não pertence à imagem da exponencial,*

$$\begin{aligned} W &= \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z} \ , \ z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \} \\ &= \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z} \ , \ |z| > 0 \ , \ \arg z = 0 \text{ ou } \arg z = \pi \ \} \\ &= \{x + i \underbrace{(2k\pi)}_{y} : k \in \mathbb{Z} \ , \ x \in \mathbb{R} \ \} \ . \end{aligned}$$

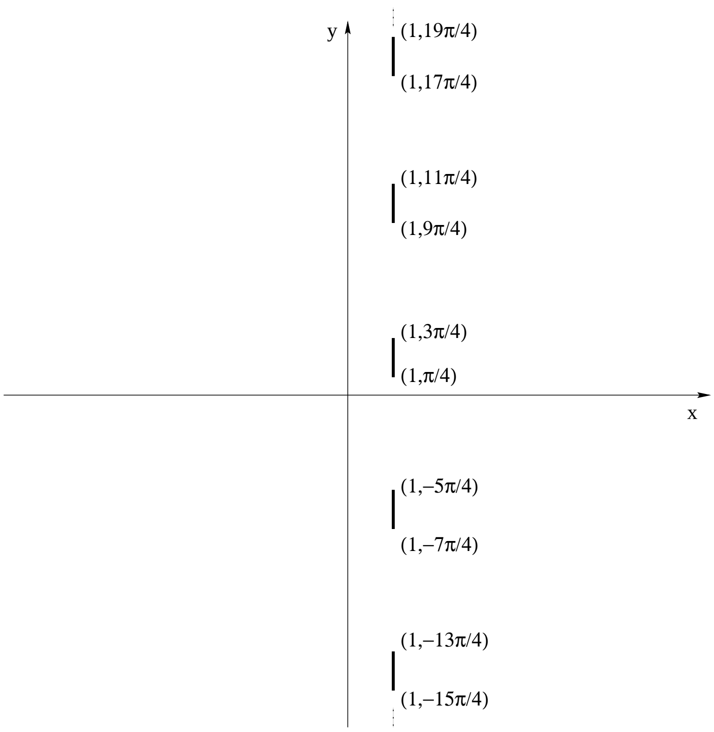
Portanto o esboço do conjunto W é:



(c)

$$\begin{aligned} W &= \{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\ ,\ |z| = e\ ,\ \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}\ \} \\ &= \{\underbrace{1}_{x} + i\underbrace{(\theta + 2k\pi)}_{y} : k \in \mathbb{Z}\ ,\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\ \}\ . \end{aligned}$$

Portanto o esboço do conjunto W é:



□

(10) Calcule pela definição

$$\int_\gamma \frac{z+2}{z}\, dz \ ,$$

onde γ é a semicircunferência ou circunferência parametrizada por:

(a) $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$;
(b) $z = 2e^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$;
(c) $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Resolução:

(a) *A parametrização* $z(\theta) = 2e^{i\theta}$ *tem derivada* $z'(\theta) = 2ie^{i\theta}$. *Logo, pela definição de integral tem-se*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{z+2}{z}\, dz &= \int_\gamma \left(1 + \frac{2}{z}\right) dz \\
&= \int_0^\pi \left(1 + \frac{2}{2e^{i\theta}}\right) 2ie^{i\theta} d\theta \\
&= \int_0^\pi \left(2ie^{i\theta} + 2i\right) d\theta \\
&= 2e^{i\theta}\Big|_0^\pi + 2\pi i \\
&= -2 - 2 + 2\pi i \\
&= -4 + 2\pi i \ .
\end{aligned}$$

(b) *Analogamente à alínea anterior,*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{z+2}{z}\, dz &= \int_\gamma \left(1 + \frac{2}{z}\right) dz \\
&= \int_\pi^{2\pi} \left(1 + \frac{2}{2e^{i\theta}}\right) 2ie^{i\theta} d\theta \\
&= \int_\pi^{2\pi} \left(2ie^{i\theta} + 2i\right) d\theta \\
&= 2e^{i\theta}\Big|_\pi^{2\pi} + 2\pi i \\
&= 2 - (-2) + 2\pi i \\
&= 4 + 2\pi i \ .
\end{aligned}$$

(c) *Pela aditividade do integral em relação ao caminho de integração, o integral desta alínea é igual à soma dos integrais das alíneas (a) e (b):*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{z+2}{z}\, dz &= (-4 + 2\pi i) + (4 + 2\pi i) \\
&= 4\pi i \ .
\end{aligned}$$

□

(11) Seja γ a circunferência de raio 1 centrada na origem percorrida uma vez no sentido positivo. Usando o teorema de Cauchy e as fórmulas integrais de Cauchy, calcule os seguintes integrais:

(a)
$$\int_\gamma 1\ dz\ ;$$

(b)
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}\ dz\ ;$$

(c)
$$\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-2i)^7}\ dz\ ;$$

(d)
$$\int_\gamma \frac{\sin z}{(2z-i)^6}\ dz\ .$$

Resolução:

(a) *A função constante $f(z) = 1$ é analítica em todo o plano $\mathbb{C}$, o qual é uma região simplesmente conexa. Logo, pelo teorema de Cauchy, o integral de $f(z)$ ao longo de qualquer caminho fechado em $\mathbb{C}$ é 0. Em particular ,*

$$\int_\gamma 1\ dz = 0\ .$$

(b) *A função $f(z) = e^z$ é analítica em $\mathbb{C}$ e γ é um caminho fechado simples contendo a origem e orientado no sentido positivo. Portanto, pela fórmula integral de Cauchy,*

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^z}{z}\ dz &= \int_\gamma \frac{f(z)}{z-0}\ dz \\ &= 2\pi i f(0) \\ &= 2\pi i\ .\end{aligned}$$

(c) *A função*

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z-2i)^7}$$

é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{2i\}$. Como $2i$ não pertence ao interior do contorno γ, a função é analítica numa região que contém o interior do contorno γ e portanto, pelo teorema de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-2i)^7}\ dz = \int_\gamma f(z)\ dz = 0\ .$$

(d) *Pode-se escrever o integral pedido na forma*

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{(2z-i)^6}\ dz = \frac{1}{2^6}\int_\gamma \frac{\sin z}{(z-\frac{i}{2})^6}\ dz\ .$$

A função $f(z) = \sin z$ é analítica em $\mathbb{C}$ e, portanto, numa região que contém o interior do caminho γ. Aplicando a $f(z) = \sin z$ a fórmula integral de Cauchy para a *derivada de ordem 5, obtém-se*

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\sin z}{(2z-i)^6}\,dz &= \frac{1}{2^6}\cdot\frac{2\pi i}{5!}\cdot f^{(5)}(\frac{i}{2})\\ &= \frac{\pi i}{2^5\cdot 120}\cdot\cos(\frac{i}{2})\\ &= \frac{\pi i}{2^8\cdot 15}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}}+e^{\frac{1}{2}}}{2}\\ &= \frac{(1+e)\pi i}{2^9\cdot 15\sqrt{e}}\,.\end{aligned}$$

□

(12) Determine a série de Taylor em torno da origem de cada uma das seguintes funções, indicando o raio de convergência.

(a) $f(z)=\frac{1}{1-z}$;
(b) $f(z)=e^{z+2}$;
(c) $f(z)=\begin{cases}\cos z & \text{se } \operatorname{Re} z<1\\ 0 & \text{caso contrário.}\end{cases}$

Resolução:

(a) *Para $|z|<1$, a função f é a soma da série geométrica de razão z. Por unicidade do desenvolvimento em série de potências, conclui-se que o desenvolvimento de Taylor é*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$$

válido para $|z|<1$. O raio de convergência desta série é 1.

(b) *Tem-se*

$$e^{z+2}=e^2e^z=e^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}\,,\qquad \forall z\in\mathbb{C}\,.$$

Pelo resultado de unicidade no teorema da série de Taylor, conclui-se que o desenvolvimento de Taylor de e^{z+2} em torno da origem é

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^2}{k!}z^k$$

com raio de convergência $+\infty$ (porque esta série converge para todo o $z\in\mathbb{C}$).

(c) *A série de Taylor de uma função num ponto depende apenas dos valores que a função toma numa vizinhança desse ponto. Logo, o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ em* *torno da origem é o mesmo que o de* $\cos z$*. Ora*

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(iz)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-iz)^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}\end{aligned}$$

onde a última igualdade se deve ao cancelamento das potências ímpares de z*. Este desenvolvimento é válido para qualquer* $z \in \mathbb{C}$*, porque o desenvolvimento da exponencial é válido para todo o* $z \in \mathbb{C}$*. Assim, a série de Taylor de* $f(z)$ *em torno da origem é*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

e o raio de convergência desta série de potências é $+\infty$*.*

$\square$

Comentário: *Apesar da série de Taylor da alínea (c) convergir para todo o* $z \in \mathbb{C}$*, ela só representa a função* f *no disco aberto de raio 1 centrado na origem.* $\diamondsuit$

(13) Determine as séries de Laurent da função

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

válidas nas seguintes regiões:

(a) $0 < |z| < 1$;
(b) $|z| > 1$;
(c) $0 < |z-1| < 1$;
(d) $|z-1| > 1$.

Resolução:

(a) *Tem-se*

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}z^k \qquad \textit{para } 0<|z|<1 \\ &= \sum_{k=-1}^{+\infty}z^k \qquad \textit{para } 0<|z|<1\ .\end{aligned}$$

Pelo resultado de unicidade no teorema da série de Laurent, conclui-se que o desenvolvimento de Laurent na região $0 < |z| < 1$ *é*

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{+\infty} z^k\ .$$

(b) *Tem-se*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z} \\
&= \frac{1}{z}\cdot\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1} \\
&= -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\
&= -\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k \qquad \text{para } \left|\frac{1}{z}\right|<1 \quad (\text{ou seja, } |z|>1) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty}-\frac{1}{z^k} \qquad \text{para } |z|>1\ .
\end{aligned}$$

Por unicidade, conclui-se que o desenvolvimento de Laurent na região $|z|>1$ *é*

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{-2}-z^k\ .$$

(c) *Tem-se*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)} &= -\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z} \\
&= -\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+(z-1)} \\
&= -\frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(z-1)^k \qquad \text{para } 0<|z-1|<1 \\
&= \sum_{k=-1}^{+\infty}(-1)^k(z-1)^k \qquad \text{para } 0<|z-1|<1\ .
\end{aligned}$$

Por unicidade, conclui-se que a série de Laurent na região $0<|z-1|<1$ *é*

$$f(z)=\sum_{k=-1}^{+\infty}(-1)^k(z-1)^k\ .$$

(d) *Tem-se*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(1-z)} &= -\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z} \\
&= -\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+(z-1)} \\
&= -\frac{1}{z-1}\cdot\frac{\frac{1}{z-1}}{1+\frac{1}{z-1}} \\
&= -\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{z-1}\right)^k \qquad \text{para } \left|\frac{1}{z-1}\right|<1 \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(z-1)^k} \qquad \text{para } |z-1|>1\ .
\end{aligned}$$

Portanto a série de Laurent para $|z-1|>1$ é

$$\frac{1}{z(1-z)}=\sum_{k=-\infty}^{-2}(-1)^{k-1}(z-1)^k\ .$$

□

(14) Seja f a função definida por

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z}+\frac{1}{2-z}\ .$$

(a) Determine e classifique as singularidades de f.
(b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido para $|z|>2$.

Resolução:
(a) *A função $f(z)$ tem uma singularidade removível em $z=0$ e tem um pólo simples em $z=2$ porque $\lim_{z\to 0} f(z)=\frac{3}{2}$ existe e $\lim_{z\to 0}\left[(z-2)f(z)\right]=-1$ existe não nulo.*
(b) *Tem-se*

$$\frac{e^z-1}{z}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}}{z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!}\qquad \textit{para todo o } z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

e

$$\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=-\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{-k-1}z^k\qquad \textit{para } |z|>2\ .$$

O desenvolvimento pedido é a soma destes dois:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kz^k\quad \textit{onde}\quad a_k=\begin{cases}\frac{1}{(k+1)!}\ , & \textit{se } k\geq 0\\ -2^{-k-1}\ , & \textit{se } k\leq -1\ .\end{cases}$$

□

(15) Seja f a função definida por

$$f(z)=\frac{1}{2+z}+\frac{\sin z}{z^2}-\frac{1}{z}\ .$$

(a) Determine e classifique as singularidades de f.
(b) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido para $0<|z|<2$.
(c) Calcule o integral de f ao longo da circunferência de raio 1 centrada na origem e percorrida uma vez no sentido positivo.
(d) Determine o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z+3$, *sem* calcular os coeficientes desse desenvolvimento. Justifique!

Resolução:

(a) *A função f(z) tem singularidades nos pontos $z = 0$ e $z = -2$. No ponto 0 tem-se*

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{2+z}+\frac{\sin z}{z^2}-\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2}+\lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z}{z^2} \\
&= \frac{1}{2}+\lim_{z\to 0}\frac{\cos z - 1}{2z} \\
&= \frac{1}{2}+\lim_{z\to 0}\frac{-\sin z}{2} \\
&= \frac{1}{2}+0
\end{aligned}$$

onde na segunda e terceira igualdades se aplicou a regra de l'Hospital (também conhecida por regra de l'Hôpital ou regra de Cauchy) para resolver a indeterminação do limite. Uma vez que $f(z)$ tem limite quando $z \to 0$, conclui-se que o ponto $z = 0$ é uma singularidade removível.
Quanto ao ponto $z = -2$, tem-se

$$\lim_{z\to -2} f(z) = \infty \ ,$$

logo o ponto não é uma singularidade removível. Como

$$\lim_{z\to -2}\left[(z+2)\left(\frac{1}{z+2}+\frac{\sin z}{z^2}-\frac{1}{z}\right)\right] = 1+0-0 = 1 \ ,$$

conclui-se que o ponto $z = -2$ é um pólo simples.

(b) *Tem-se*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+z}+\frac{\sin z}{z^2}-\frac{1}{z} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{z} && \textit{para } z\in\mathbb{C}\setminus\{-2,0\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^k+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} && \textit{para } 0<\left|\frac{z}{2}\right|<1 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^k}{2^{k+1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} && \textit{para } 0<|z|<2 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}a_k z^k && \textit{para } 0<|z|<2
\end{aligned}$$

onde

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} & \textit{se } k \textit{ é par} \\[2ex] \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}+\frac{1}{(k+2)!} & \textit{se } k \textit{ é ímpar} . \end{cases}$$

(c) *Seja γ a circunferência de raio 1 percorrida uma vez no sentido positivo. A única singularidade de $f(z)$ no interior de γ é o ponto $z = 0$. Uma vez que esta é uma singularidade removível, pode-se prolongar $f(z)$ por continuidade ao ponto 0 obtendo* *uma função analítica no interior do contorno γ. Então, pelo teorema de Cauchy, conclui-se que*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0 \; .$$

(d) *Seja R o raio de convergência do desenvolvimento em série de Taylor de $f(z)$ em torno de $z = -3$. Pelo teorema da série de Taylor, sabe-se que R é maior ou igual ao raio do maior disco centrado em $z = -3$ no qual f é analítica. Isto é, R é maior ou igual à distância de $z = -3$ à(s) singularidade(s) mais próxima(s). Como a singularidade mais próxima de $z = -3$ é $z = -2$ (a qual está à distância $|-3+2| = 1$), conclui-se que $R \geq 1$.*
Por outro lado, a série de Taylor converge para uma função analítica no interior do seu disco de convergência; essa função analítica coincide com $f(z)$ para $|z| < 1$. Ora viu-se na alínea (a) que $f(z) \to \infty$ quando $z \to -2$. Portanto $z = -2$ não pode pertencer ao disco de convergência da série, de modo que $R \leq 1$.
Conclui-se que o raio de convergência do desenvolvimento de $f(z)$ em série de potências de $(z+3)$ é $R = 1$.

□

Comentário: *Para classificar a singularidade $z = 0$ na alínea (a), poder-se-ia ter utilizado o desenvolvimento de Laurent da função $\frac{\sin z}{z^2} - \frac{1}{z}$ em torno de $z = 0$*

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z^2} - \frac{1}{z} &= \frac{1}{z^2}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) - \frac{1}{z} \\ &= -\frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots \end{aligned}$$

Uma vez que o desenvolvimento de Laurent em torno de $z = 0$ não tem termos com potências negativas de z, conclui-se novamente que a singularidade é removível. ♢

(16) Seja f a função definida por

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1} \; .$$

(a) Determine e classifique as singularidades de f.
(b) Utilize o teorema dos resíduos para calcular

$$\oint_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz \; ,$$

onde γ_R é a fronteira do semicírculo

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| \leq R, \; \operatorname{Im} z \geq 0\} \; ,$$

de raio $R > 1$ percorrida uma vez no sentido positivo.
(c) Mostre que

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz \right| \leq \frac{R\pi}{R^4-1} \; ,$$

onde Γ_R é a porção de γ_R correspondente à semicircunferência

$$\{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| = R, \; \operatorname{Im} z \geq 0\} \; .$$

(d) Utilize os resultados das alíneas anteriores para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx \ .$$

Resolução:

(a) *As singularidades de f são os zeros de z^4+1:*

$$\begin{aligned}
z^4+1=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{i\pi}} \\
&\Longleftrightarrow \quad z = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} = \cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4} \ , \ k=0,1,2,3 \\
&\Longleftrightarrow \quad z = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ ou } \ z = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\qquad \text{ou } \ z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ ou } \ z = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \ .
\end{aligned}$$

Cada uma destas quatro singularidades é um pólo simples porque o seguinte limite existe e é não nulo ($k=0,1,2,3$):

$$\lim_{z\to e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}} \left[(z - e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}) \frac{1}{z^4+1} \right] = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-3i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$$

onde na primeira igualdade se empregou a regra de l'Hospital para resolver a indeterminação ($\frac{0}{0}$).

Comentário: *Estas quatro singularidades são pólos simples porque cada uma corresponde a um zero simples do denominador:*

$$z^4+1 = \left(z - \tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z + \tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z + \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z - \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \ .$$

$\diamondsuit$

(b) *Pelo teorema dos resíduos, o integral pedido é igual a $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos nas singularidades de f situadas na região limitada pelo caminho. Os pólos*

$$z_1 \overset{def}{=} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad z_2 \overset{def}{=} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

são as únicas singularidades de f na região limitada pelo caminho γ_R. Usa-se a fórmula para o cálculo de resíduos em pólos simples e a regra de l'Hospital para resolver a indeterminação:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z_1} f &= \lim_{z\to z_1} \left[(z-z_1)\frac{1}{z^4+1} \right] \\
&= \lim_{z\to z_1} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_1^3} \\
&= \frac{1}{4} e^{i\frac{-3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z_2} f &= \lim_{z\to z_2} \left[(z-z_2)\frac{1}{z^4+1} \right] \\
&= \lim_{z\to z_2} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_2^3} \\
&= \frac{1}{4} e^{i\frac{-9\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8} \ .
\end{aligned}$$

Conclui-se que

$$\oint_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\, dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z_1} f + \mathrm{Res}_{z_2} f\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \ .$$

(c) *Tem-se a estimativa*

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} |f(z)|\, |dz| \leq M_R \cdot L_R \ ,$$

onde M_R é um majorante do módulo da função integranda $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ sobre o caminho Γ_R e $L_R = \pi R$ é o comprimento do caminho Γ_R (i.e., o comprimento duma semicircunferência de raio R). Para majorar $\frac{1}{|z^4+1|}$, minora-se o denominador. Pela desigualdade triangular, tem-se que

$$|z^4+1| \geq |z^4| - 1 \ .$$

Sobre Γ_R, tem-se $|z| = R$. Logo, como $R > 1$, tem-se

$$\left| \frac{1}{z^4+1} \right| = \frac{1}{|z^4+1|} \leq \frac{1}{R^4-1} \ .$$

Tomando $M_R = \frac{1}{R^4-1}$, fica

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\, dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^4-1} \quad \text{para } R > 1 \ .$$

(d) *Os integrais de f sobre γ_R e sobre Γ_R estão relacionados por:*

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1}\, dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\, dz \ ,$$

onde o integral em dx representa um integral sobre um segmento do eixo real em $\mathbb{C}$. Pela alínea (b), o termo da esquerda é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ para qualquer $R > 1$. Pela alínea (c), o segundo termo da direita tende para zero quando R tende para infinito. Portanto, fazendo $R \to +\infty$, obtém-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \ .$$

$\square$

(17) Seja γ_R a curva fechada simples dada pela fronteira do semicírculo,

$$D_R = \{z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 \leq \rho \leq R \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi\} \ ,$$

de raio $R > 1$, percorrida no sentido positivo.

(a) Calcule o integral

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\, dz \ .$$

(b) Calcule o integral real

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx \ .$$

Resolução:

(a) *As singularidades de* $\frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2}$ *são* $z = \pm i$*, ambas pólos duplos. A única singularidade na região limitada por* γ_R *é* $z = i$*. Tem-se*

$$\mathrm{Res}_{z=i} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left((z-i)^2 \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+i)^2} = -\frac{i}{4}.$$

Pelo teorema dos resíduos,

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\, dz = 2\pi i \frac{-i}{4} = \frac{\pi}{2}\ .$$

(b) *Como a função integranda é par, tem-se*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx\ . \qquad (\star)$$

Seja Γ_R *o troço de* γ_R *parametrizado por* $z(\theta) = Re^{i\theta}$ *com* $0 \le \theta \le \pi$*. Usando a alínea anterior tem-se*

$$\frac{\pi}{2} = \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\, dz\ . \qquad (\star\star)$$

Observa-se que

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\, dz\right| \le \int_{\Gamma_R} \frac{|z^2|}{(|z^2|-1)^2}\, |dz| \le \frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2}$$

tende para 0 quando $R \to +\infty$*. Logo, as equações* $(\star)$ *e* $(\star\star)$ *dá*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\ .$$

$\square$

(18) (a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent na região $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ da função

$$g(z) = \left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}}\ .$$

(b) Calcule o resíduo no ponto $z = 0$ da função

$$f(z) = \frac{1}{z-4} + \left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}}\ .$$

(c) Calcule

$$\oint_\gamma \left(\frac{1}{z-4} + \left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}}\right) dz\ ,$$

onde γ é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$ percorrida uma vez no sentido positivo.

(d) Quais são os possíveis valores do integral

$$\oint_C \left(\frac{1}{z-4} + \left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}}\right) dz\ ,$$

onde C é uma curva fechada simples contida em $\mathbb{C}\setminus\{0, 4\}$?

Resolução:

(a) *A partir da série de Taylor da exponencial, deduz-se que o seguinte desenvolvimento é válido em* $\mathbb{C}\setminus\{0\}$*:*

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} \ .$$

Logo, em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$*, tem-se*

$$\begin{aligned} \left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}} &= \left(z - z^3\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^{k-1}} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^{k-3}} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+1} \frac{1}{(1-k)!} z^k - \sum_{k=-\infty}^{+3} \frac{1}{(3-k)!} z^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+3} a_k z^k \ , \end{aligned}$$

onde

$$a_k = \begin{cases} -1 & \text{se } k = 2 \text{ ou } 3 \\ \frac{1}{(1-k)!} - \frac{1}{(3-k)!} & \text{se } k \leq 1 \ . \end{cases}$$

Pela unicidade do desenvolvimento de uma função analítica numa coroa circular em série de potências positivas ou negativas (cf. teorema da série de Laurent), conclui-se que o desenvolvimento em série de Laurent na região $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *da função* $g(z)$ *é*

$$\sum_{k=-\infty}^{+1} \frac{1}{(1-k)!} z^k - \sum_{k=-\infty}^{+3} \frac{1}{(3-k)!} z^k = \sum_{k=-\infty}^{+3} a_k z^k \ ,$$

onde os coeficientes a_k *estão definidos acima.*

(b) *O resíduo de* $f(z)$ *no ponto* $z = 0$ *é o coeficiente* a_{-1} *da potência* $\frac{1}{z}$ *no desenvolvimento de* $f(z)$ *em série de Laurent em potências de* z *válido num disco furado,* $0 < |z| < r$*, onde* $f(z)$ *é analítica.*[1] *Como a série de Laurent da soma* $\frac{1}{z-4} + \left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}}$ *é a soma das séries de Laurent de* $\frac{1}{z-4}$ *e de* $\left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}}$*, tem-se que*

$$\operatorname{Res}_0 \left(\frac{1}{z-4} + \left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}} \right) = \operatorname{Res}_0 \frac{1}{z-4} + \operatorname{Res}_0 \left(\left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}} \right) \ .$$

Uma vez que $\frac{1}{z-4}$ *é analítica em* $z = 0$*, a série de Laurent de* $\frac{1}{z-4}$ *em torno de* $z = 0$ *é uma série de Taylor, pelo que só tem potências positivas e consequentemente*

$$\operatorname{Res}_0 \frac{1}{z-4} = 0 \ .$$

O resíduo de $g(z) = \left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}}$ *no ponto* $z = 0$ *é o coeficiente da potência* $\frac{1}{z}$ *no desenvolvimento de* $g(z)$ *válido em* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$*, o qual foi calculado na alínea (a).*

[1] Pode tomar-se $r \in]0, 4[$ porque 4 é a distância de $z = 0$ à singularidade mais próxima $z = 4$.

Conclui-se que

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_0 f &= \mathrm{Res}_0\left(\left(z-z^3\right)\, e^{\frac{1}{z}}\right)\\ &= \frac{1}{(1-(-1))!}-\frac{1}{(3-(-1))!}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{24}\\ &= \frac{11}{24}\ .\end{aligned}$$

(c) *O caminho γ é fechado simples, orientado positivamente e envolve apenas uma singularidade da função integranda $f(z)$, nomeadamente o ponto $z=0$. Pelo teorema dos resíduos , o integral pedido é*

$$\oint_\gamma \left(\frac{1}{z-4}+\left(z-z^3\right)\, e^{\frac{1}{z}}\right)\, dz\ = 2\pi i\,\mathrm{Res}_0 f = \pi i \frac{11}{12}\ .$$

(d) *Pelo teorema dos resíduos, cada integral*

$$\oint_C \left(\frac{1}{z-4}+\left(z-z^3\right)\, e^{\frac{1}{z}}\right)\, dz$$

é $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos nas singularidades envolvidas pelo caminho C, se o caminho for percorrido no sentido positivo, e é $-2\pi i$ vezes a soma dos resíduos nas singularidades envolvidas pelo caminho C, se o caminho for percorrido no sentido negativo.

A função integranda $f(z)$ tem apenas duas singularidades, $z=0$ e $z=4$. O ponto $z=4$ um pólo simples de $f(z)$ porque o limite

$$\lim_{z\to 4}\left[(z-4)\left(\frac{1}{z-4}+\left(z-z^3\right)e^{\frac{1}{z}}\right)\right] = 1\ .$$

existe e não é nulo. O resíduo de $f(z)$ em $z=4$, é

$$\mathrm{Res}_4 f = \lim_{z\to 4}\left[(z-4)\left(\frac{1}{z-4}+\left(z-z^3\right)e^{\frac{1}{z}}\right)\right] = 1\ .$$

Conclui-se que os possíveis valores do integral indicado são:

- $\frac{11}{24}$, *se C envolver apenas a singularidade $z=0$ no sentido positivo,*
- $-\frac{11}{24}$, *se C envolver apenas a singularidade $z=0$ no sentido negativo,*
- 1, *se C envolver apenas a singularidade $z=4$ no sentido positivo,*
- -1, *se C envolver apenas a singularidade $z=4$ no sentido negativo,*
- $\frac{35}{24}$, *se C envolver ambas as singularidades $z=0$ e $z=4$ no sentido positivo,*
- $-\frac{35}{24}$, *se C envolver ambas as singularidades $z=0$ e $z=4$ no sentido negativo, ou*
- 0, *se C não envolver nenhuma das singularidades.*

□

Comentário: *Tratando-se C de um caminho simples (i.e., que não se auto-intersecta), não é possível que dê mais do que uma volta a cada singularidade.* ♢