1.

a) **Determine as soluções de**

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

b) **Determine a solução que satisfaz a condição inicial** $u(0,x) = (\pi - x)x$.

Resolução:

a) Recorrendo ao método de separação de variáveis pode-se procurar soluções do tipo $u(t,x) = T(t)X(x)$, caso em que a equação dada se escreve como

$$T'X = TX'' - TX.$$

Supondo que $T(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ e $X(x) \neq 0$, $\forall x \in]0,\pi[$ pode-se dividir esta equação por $T(t)X(x)$ vindo

$$\frac{T'}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x) - 1.$$

Observando que o membro esquerdo desta equação só depende de t, o direito só depende de x e que a equação deverá ser satisfeita para todos os pontos (t,x) no aberto $\mathbb{R}^+ \times]0,\pi[$, conclui-se que terá de existir uma constante real σ independente de t e de x tal que

$$\frac{T'}{T}(t) = \sigma = \frac{X''}{X}(x) - 1,$$

ou seja,

$$\begin{cases} T' - \sigma T = 0 \\ X'' - (1+\sigma)X = 0, \end{cases}$$

com as condições na fronteira

$$\begin{cases} 0 = u(t,0) = T(t)X(0) \\ 0 = u(t,\pi) = T(t)X(\pi) \end{cases} \implies X(0) = X(\pi) = 0.$$

Comecemos por determinar as soluções não-triviais (não identicamente nulas) do problema de valores na fronteira para $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' - (1+\sigma)X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

- Se $1+\sigma = 0$ a equação diferencial fica reduzida a $X'' = 0$ cujas soluções são $X(x) = ax+b$ e atendendo às condições na fronteira $0 = X(0) = b$ e $0 = X(\pi) = a\pi + b$ conclui-se imediatamente que $a = b = 0$ e portanto a única solução do problema é a solução trivial $X(x) \equiv 0$.

- Seja agora $1+\sigma>0$. A solução geral da equação é $X(x) = ae^{\sqrt{1+\sigma}x} + be^{-\sqrt{1+\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a+b$ e $0 = X(\pi) = ae^{\sqrt{1+\sigma}\pi} + be^{-\sqrt{1+\sigma}\pi}$ cuja única solução é $a = b = 0$ fornecendo como única solução da equação a função identicamente nula $X(x) \equiv 0$.
- Finalmente tome-se $1+\sigma<0$. Por facilidade de notação é conveniente escrever $1+\sigma = -\lambda^2$ com $\lambda>0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$. E as condições na fronteira fornecem

$$\begin{cases} 0 = X(0) = a \\ 0 = X(\pi) = a\cos\lambda\pi + b\sin\lambda\pi, \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} a = 0 \\ b\sin\lambda\pi = 0, \end{cases}$$

pelo que $\lambda = \lambda_k = k$, com $k \in \mathbb{N}_1$ arbitrário (pois caso contrário teria de ser $b = 0$ e ter-se-ia $X(x) = 0$.) Obtêm-se assim infinitas soluções do problema de valores na fronteira, em particular as funções

$$X_k(x) = \sin kx,$$

e todas as combinações lineares de um número finito destas funções.

Tendo em atenção que $\sigma = -1-\lambda^2 = -1-k^2$ tem-se a equação para T escrita na forma

$$T' = -(1+k^2)T$$

cuja solução geral é $T_k(t) = \alpha_k e^{-(1+k^2)t}$ com $\alpha_k \in \mathbb{R}$ arbitrário. Atendendo ao que ficou escrito acima podemos concluir que a solução formal do problema apresentado é

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(kx) e^{-(1+k^2)t}.$$

b) Para que a solução formal encontrada na alínea anterior satisfaça a condição inicial dada há que escolher as constantes α_k de modo a que

$$(\pi - x)x = u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin(kx),$$

ou seja, os α_k devem ser os coeficientes da série de Fourier de senos da função $2\pi-$periódica cuja restrição a $[0,\pi]$ é igual a $f(x) = (\pi - x)x$.

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)x\sin(kx)dx = \\ &= 2\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(kx)dx \end{aligned}$$

(primitivando por partes uma vez o primeiro integral e duas vezes o segundo)

$$= 2\left(-\frac{x}{k}\cos kx + \frac{1}{k^2}\sin kx\right)\Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{k}\cos kx + \frac{2x}{k^2}\sin kx + \frac{2}{k^3}\cos kx\right)\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{4}{k^3\pi}\left(1+(-1)^k\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{8}{k^3\pi} & \text{se } k \text{ é par} \\ 0 & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

pelo que concluimos que

$$\alpha_{2n+1} = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_{2n} = \frac{1}{n^3\pi}$$

e a solução formal pretendida é

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3\pi}\sin(2nx)e^{-(1+4n^2)t}.$$

2.

1. **As vibrações de uma dada placa $\mathcal{P}$, circular, de raio 1, são descritas pela equação das ondas**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Delta u, \quad (x,y,t) \in \{(x,y) : x^2+y^2<1\} \times \mathbb{R}$$

com condições de fronteira $u(x,y,t) = xy$ em $\{(x,y) : x^2+y^2=1\}\times\mathbb{R}$ e com condições iniciais $u(x,y,0) = f_0(x,y)$ e $u_t(x,y,0) = f_1(x,y)$ dadas. Na equação acima $c>0$ é uma constante real e $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ é o laplaciano da função u.
As soluções estacionárias (= independentes do tempo t) desta equação fornecem as posições de equilibrio da placa $\mathcal{P}$.

a) **Verifique que as posições de equilíbrio da placa $\mathcal{P}$ satisfazem a equação de Laplace**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \textbf{em} \quad \{(x,y) : x^2+y^2<1\} \tag{1}$$

com a condição na fronteira

$$u(x,y) = xy \quad \textbf{em} \quad \{(x,y) : x^2+y^2=1\} \tag{2}$$

2. **Utilizando as coordenadas polares (r,θ) dadas por $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ e definindo $v(r,\theta) = u(x(r,\theta), y(r,\theta))$ a equação (1) é transformada em**

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0, \quad (r,\theta) \in]0,1[\times]0,2\pi[\tag{3}$$

e o problema (1)-(2) fica reduzido à determinação de uma solução de (3) que satisfaça as condições

(i) v **é contínua em** $[0,1]\times[0,2\pi]$ **e** $v(r,0)=v(r,2\pi)$,

(ii) $v(1,\theta)=\cos\theta\sin\theta$ **para** $\theta\in[0,2\pi]$.

As alíneas seguintes têm por objectivo a obtenção duma solução deste problema utilizando o método de Fourier (separação de variáveis).

a) **Escreva** $v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$. **Verifique que as equações para** R **e** Θ **são, respectivamente,**

$$r^2R''+rR'-\sigma R=0 \tag{4}$$

$$\Theta''+\sigma\Theta=0 \tag{5}$$

onde σ **é um parâmetro real independente de** r **e** θ.

b) **Usando (5) determine os valores possíveis de** σ. **Escreva uma expressão para a solução geral de (5).**

c) **Verifique que para cada** $\sigma=n^2\in\mathbb{N}$ **a equação (4) tem um par de soluções** ***linearmente independentes,*** **a saber,** 1 **e** $\log r$ **se** $n=0$ **e** r^n **e** r^{-n} **se** $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

d) **Justifique que para que** $v(r,\theta)$ **seja solução do problema dado as únicas soluções de (4) que podem ser usadas são** $R_n(r)=r^n$ **com** $n\geq 0$.

e) **Escreva a série de Fourier para** $v(r,\theta)$ **e determine os coeficientes de modo que** v **satisfaça a condição na fronteira. Justifique que a solução formal assim obtida é, de facto, uma solução do problema dado.**

3. **Obtenha a solução** $u(x,y)$ **do problema original (1)-(2).**

Resolução:

1.a) Sendo $u=u(t,x,y)$ uma solução estacionária da equação tem-se que é independente de t podendo escrever-se $u=u(x,y)$ e obtendo-se imediatamente $\partial u/\partial t=\partial^2u/\partial t^2=0$ e portanto, como $c\neq 0$, a equação vem $\Delta u=0$ na região $\{(x,y): x^2+y^2<1\}$. Como as condições de fronteira já não dependiam de t permanecem independentes de t e não são alteradas.

2.a) Sendo $v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$ tem-se $v_r=R'\Theta$, $v_{rr}=R''\Theta$ e $v_{\theta\theta}=R\Theta''$ e portanto a equação (3) vem $R''\Theta+\frac{1}{r}R'\Theta+\frac{1}{r^2}R\Theta''=0$. Supondo que R e Θ são diferentes de 0 em $]0,1[$ e em $]0,2\pi[$, respectivamente, pode-se dividir a equação obtida por $R(r)\Theta(\theta)$ obtendo-se

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}(r)=-\frac{\Theta''}{\Theta}(\theta),\quad (r,\theta)\in]0,1[\times]0,2\pi[.$$

Como o membro esquerdo desta igualdade é função só de r, o membro direito só depende de θ e a igualdade tem de ser válida em todos os pontos de um aberto de $\mathbb{R}^2$, conclui-se que terá se existir uma constante real σ independente de r e de θ tal que

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}(r)=\sigma=-\frac{\Theta''}{\Theta}(\theta),\quad (r,\theta)\in]0,1[\times]0,2\pi[,$$

e portanto obtêm-se as equações (4) e (5) pretendidas:

$$r^2R'' + rR' - \sigma R = 0,$$

$$\Theta'' + \sigma\Theta = 0.$$

b) A determinação dos valores possíveis de σ utilizando a equação para Θ envolve a identificação de alguma condição adicional que terá de ser satisfeita pelas soluções $\Theta(\theta)$. No presente caso observe-se que a condição *(i)* do enunciado implica que Θ tenha de satisfazer $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$. Vejamos então quais os possíveis valores de σ para os quais o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \Theta'' + \sigma\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \end{cases}$$

tem soluções não identicamente nulas.

- Se $\sigma < 0$ a equação pode ser escrita como $(D^2 - |\sigma|)\Theta = 0$, cuja solução geral é $\Theta(\theta) = \alpha_1 e^{\sqrt{|\sigma|}\theta} + \alpha_2 e^{-\sqrt{|\sigma|}\theta}$. Tendo esta solução de ser $2\pi-$periódica conclui-se que se tem de ter $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, o que fornece a solução identicamente nula.
- Se $\sigma = 0$ a equação fica $\Theta'' = 0$ cuja solução geral é $\Theta(\theta) = \alpha\theta + \beta$. Atendendo às condições de fronteira conclui-se que $\alpha = 0$ e β pode ser um real arbitrário.
- Finalmente, considere-se $\sigma > 0$ e para facilidade de notação faça-se $\sigma = \lambda^2$. A solução geral da equação é agora $\Theta(\theta) = \alpha_1 \cos\lambda\theta + \alpha_2 \sin\lambda\theta$. A condição na fronteira resulta em

$$\alpha_1 = \Theta(0) = \Theta(2\pi) = \alpha_1 \cos 2\pi\lambda + \alpha_2 \sin 2\pi\lambda,$$

a qual é satisfeita para quaisquer α_1 e α_2 se e só se $\lambda = n \in \mathbb{Z}$, concluindo-se que se tem de ter $\sigma = n^2$ e vindo como soluções de (5) com a condição de fronteira periódica as funções $\Theta_n(\theta) = \alpha_1 \cos n\theta + \alpha_2 \sin n\theta$.

c) Considere-se primeiro $n = 0$. Verifiquemos que $R(r) = 1$ e $R(r) = \log r$ são soluções de (4):

- $R(r) = 1 \Rightarrow R' = R'' = 0 \Rightarrow r^2R'' + rR' = 0$
- $R(r) = \log r \Rightarrow R' = \frac{1}{r},\ R'' = -\frac{1}{r^2} \Rightarrow r^2R'' + rR' = r^2 \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) + r\frac{1}{r} = -1 + 1 = 0.$

Para ver que estas funções são linearmente independentes basta verificar que o seu wronskiano é diferente de zero:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \log r \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} - 0 = \frac{1}{r} \neq 0.$$

Considerando agora $n \neq 0$ tem-se o seguinte: para $R(r) = r^n$ as suas derivadas são $R' = nr^{n-1}$ e $R'' = n(n-1)e^{n-2}$ e tem-se facilmente que $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$. Resultados inteiramente análogos ocorrem no caso $R(r) = r^{-n}$. Tendo deste modo concluindo que estas funções são soluções da equação (4) resta verificar que são linearmente independentes, para o que basta verificar que o wronskiano é diferente de zero:

$$\det \begin{bmatrix} r^n & r^{-n} \\ nr^{n-1} & -nr^{-n-1} \end{bmatrix} = -\frac{2n}{r} \neq 0.$$

d) As soluções $R(r) = \log r$ e $R(r) = r^{-n}$ fariam com que $v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ fosse descontínuo em $r = 0$, uma vez que segundo algumas direcções $\theta = K$ a função tenderia em valor absoluto para $+\infty$ quando $r \downarrow 0$, o que contradiz a imposição *(i)* do enunciado.

e) Pelo que ficou visto acima tem-se como solução geral formal de (3)

$$v(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta\right).$$

A condição na fronteira *(ii)* exige que

$$\cos\theta \sin\theta = v(1,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta\right).$$

Observando que para todo o θ se tem $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ tem-se imediatamente da igualdade anterior que

$$\begin{cases} \alpha_n = 0, \quad \forall n \\ \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \beta_n = 0, \quad \forall n \neq 2 \end{cases},$$

e portanto a solução formal do problema é

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta.$$

Como esta função é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e satisfaz as condições *(i)* e *(ii)* do enunciado conclui-se que é efectivamente a solução do problema dado.

3. Usando $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ vem imediatamente que

$$\frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta = r^2 \sin\theta\cos\theta = (r\sin\theta)(r\cos\theta) = xy,$$

concluindo-se a solução de (1)-(2) é $u(x,y) = xy, \quad \forall (x,y) \in \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

3.

Em dinâmica de fluidos uma simplificação das equações de Navier-Stokes resulta nas equações de Boussinesq, as quais, numa versão linear, se podem escrever como

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} - \beta^2 u_{xxtt} = 0 \tag{6}$$

onde α e β são parâmetros não nulos.

a) **Utilizando o método de separação de variáveis, determine a solução formal geral da equação (6) na região $t > 0,\ 0 < x < 1$, com condições de Dirichlet homogéneas $u(t,0) = u(t,1) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_0^+$.**

b) **Determine a solução formal do problema da alínea anterior que satisfaz a condição inicial** $u(0,x)=0$, $u_t(0,x)=1-|2x-1|$ **em** $[0,1]$.

c) **Poderá utilizar o teste-M de Weierstrass para estudar a solução formal obtida em b) quanto à continuidade e à diferenciabilidade? Justifique detalhadamente.**

Resolução:

a) Faça-se $u(t,x)=T(t)X(x)$. Então $u_{tt}=T''X$, $u_{xx}=TX''$, $u_{xxtt}=X''T''$ e a equação (6) toma a forma $T''X-\alpha^2TX''-\beta^2T''X''=0$, ou seja $T''X-\left(\alpha^2T+\beta^2T''\right)X''=0$. Supondo que $X(x)\neq 0$ e $\alpha^2T(t)+\beta^2T''(t)\neq 0$ a equação anterior pode-se escrever na forma

$$\frac{T''}{\alpha^2T+\beta^2T''}(t)=\frac{X''}{X}(x)$$

e, para que esta igualdade seja satisfeita para todos os pontos do aberto $\{(t,x)\in\mathbb{R}^+\times]0,1[\}$ onde a equação é colocada, tem de existir uma constante $\sigma\in\mathbb{R}$, independente de t e de x, tal que

$$\frac{T''}{\alpha^2T+\beta^2T''}(t)=\sigma=\frac{X''}{X}(x)$$

o que resulta nas duas equações diferenciais ordinárias seguintes:

$$\begin{aligned}&X''-\sigma X=0\\&(1-\beta^2\sigma)T''-\alpha^2\sigma T=0.\end{aligned}$$

Quanto às condições de fronteira tem-se que $u(t,x)=T(t)X(x)=0$ em $x=0$ e $x=1$, $(\forall t>0)$, pelo que vem $X(0)=X(1)=0$ e obtemos o seguinte problema de valores na fronteira para $X(x)$:

$$\begin{cases}X''-\sigma X=0\\X(0)=X(1)=0\end{cases}$$

Estudaremos de seguida a possibilidade de obtenção de soluções *não-triviais* (que não são identicamente nulas) deste problema:

- Considere-se $\sigma=0$. A equação diferencial fica reduzida a $X''=0$ cujas soluções são $X(x)=ax+b$ e atendendo às condições na fronteira $0=X(0)=b$ e $0=X(1)=a+b$ conclui-se imediatamente que $a=b=0$ e portanto a única solução do problema é a solução trivial $X(x)\equiv 0$.

- Seja agora $\sigma>0$. A solução geral da equação é $X(x)=ae^{\sqrt{\sigma}x}+be^{-\sqrt{\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0=X(0)=a+b$ e $0=X(1)=ae^{\sqrt{\sigma}}+be^{-\sqrt{\sigma}}$ cuja única solução é $a=b=0$ fornecendo como única solução da equação a função identicamente nula $X(x)\equiv 0$.

- Finalmente tome-se $\sigma < 0$. Por facilidade de notação é conveniente escrever $\sigma = -\lambda^2$ com $\lambda > 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a\cos 0 + b\sin 0 = a$ e portanto $0 = X(1) = 0\cos\lambda + b\sin\lambda = b\sin\lambda$ concluindo-se que, ou $b = 0$ e obtemos a solução $X(x) \equiv 0$, ou $\sin\lambda = 0$, isto é, $\lambda = \lambda_k = k\pi, k \in \mathbb{N}_1$, obtendo-se assim infinitas soluções do problema de valores na fronteira, em particular as funções $X_k(x) = \sin(k\pi x), \ \ \forall k \in \mathbb{N}_1$, e todas as combinações lineares de um número finito destas funções

Atendendo a que $\sigma = -\lambda_k^2 = -k^2\pi^2$ tem-se $1 - \beta^2\sigma = 1 + \beta^2k^2\pi^2 > 0$ pelo que a equação para $T(t)$ pode ser escrita na forma

$$T'' + \underbrace{\frac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}}_{=\mu_k^2 \ \ (\mu_k>0)} T = 0$$

cuja solução geral é $T_k(t) = c_k\cos\mu_k t + d_k\sin\mu_k t$.

Atendendo a isto a solução geral formal da equação dada é

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[c_k\sin(k\pi x)\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}}\ t\right) + d_k\sin(k\pi x)\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}}\ t\right)\right]$$

onde c_k e d_k são constantes reais.

b) Comecemos por observar que, para todo o x em $[0,1]$,

$$0 = u(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty}[c_k\sin(k\pi x)\cdot 1 + d_k\sin(k\pi x)\cdot 0] = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\sin(k\pi x)$$

o que implica que $c_k = 0$ para todo o $k \in \mathbb{N}_1$. Então vem

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k\sin(k\pi x)\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}}\ t\right)$$

e, pelo menos formalmente, tem-se

$$u_t(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k\sqrt{\frac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}}\sin(k\pi x)\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}}\ t\right)$$

pelo que

$$1 - |2x-1| = u_t(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k\sqrt{\frac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}}\sin(k\pi x)$$

e portanto $d_k\sqrt{\dfrac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}}$ são os coeficientes da série de Fourier de senos da função ímpar, periódica de período 2, cuja restrição ao intervalo $[0,1]$ é igual a $1-|2x-1|$. Calculemos então o valor destes coeficientes:

Considerando o prolongamento ímpar, 2-periódico a $\mathbb{R}$ da condição inicial tem-se, com as notações usuais, $a_n=0$, $\forall n$, e

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 (1-|2x-1|)\sin(n\pi x)dx = \\
&= 2\int_0^{1/2} 2x\sin(n\pi x)dx + 2\int_{1/2}^1 (2-2x)\sin(n\pi x)dx = \\
&= 4\int_{1/2}^1 \sin(n\pi x)dx + 4\int_0^{1/2} x\sin(n\pi x)dx - 4\int_{1/2}^1 x\sin(n\pi x)dx = \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \\
&\quad + \frac{4}{n\pi}\cos n\pi - \frac{4}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \\
&= \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \\
&= \begin{cases} \dfrac{8(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)^2\pi^2}, & \text{se } n=2\ell-1, \\ 0, & \text{se } n=2\ell. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Como $d_k\sqrt{\dfrac{\alpha^2k^2\pi^2}{1+\beta^2k^2\pi^2}} = b_k$ conclui-se que, para todos os $\ell\in\mathbb{N}_1$,

$$
\begin{aligned}
b_{2\ell-1} &= \frac{8(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)^2\pi^2}\sqrt{\frac{1+\beta^2(2\ell-1)^2\pi^2}{\alpha^2(2\ell-1)^2\pi^2}} \\
b_{2\ell} &= 0
\end{aligned}
$$

e a solução formal do problema é

$$
u(t,x) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{8(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)^2\pi^2}\sqrt{\frac{1+\beta^2(2\ell-1)^2\pi^2}{\alpha^2(2\ell-1)^2\pi^2}}\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha^2(2\ell-1)^2\pi^2}{1+\beta^2(2\ell-1)^2\pi^2}}\,t\right)\sin\left((2\ell-1)\pi x\right).
$$

c) Escrevendo

$$
u(t,x) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} u_\ell(t,x),
$$

onde $u_\ell(t,x)$ é dado pela expressão no somatório no membro direito da última expressão da alínea anterior, tem-se que $u_\ell(t,x)$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ (são produtos de senos por constantes ...).

Se a série fôr absolutamente e uniformemente convergente pode concluir-se que $u(t,x)$, dado pela soma da série, é uma função contínua. Vejamos se o teste-M de Weierstrass é aplicável a este caso:

$$|u_\ell(t,x)| \leq \frac{8}{(2\ell-1)^2\pi^2}\underbrace{\sqrt{\frac{1+\beta^2(2\ell-1)^2\pi^2}{\alpha^2(2\ell-1)^2\pi^2}}}_{\text{sucessão convergente}} \leq \frac{M}{(2\ell-1)^2} \tag{7}$$

onde $M = \dfrac{8}{\pi^2}\sup_\ell \sqrt{\dfrac{1+\beta^2(2\ell-1)^2\pi^2}{\alpha^2(2\ell-1)^2\pi^2}}$. Como a sucessão do membro direito de (7) é tal que a série correspondente é absolutamente convergente conclui-se, pelo teste-M de Weierstrass, que a série $\sum_\ell u_\ell$ é absolutamente e uniformemente convergente e, portanto, $u(t,x)$ é uma função contínua.

Analogamente, vejamos as séries das derivadas termo-a-termo:

$$\sum_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial t}, \quad \sum_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial x}, \quad \sum_\ell \frac{\partial^2 u_\ell}{\partial x^2} \quad \sum_\ell \frac{\partial^2 u_\ell}{\partial t^2}, \quad \sum_\ell \frac{\partial^4 u_\ell}{\partial x^2 \partial t^2}.$$

As majorações que se conseguem obter para os dois primeiros casos são

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial u_\ell}{\partial t}\right| &\leq \frac{N}{(2\ell-1)^2} \\ \left|\frac{\partial u_\ell}{\partial x}\right| &\leq \frac{M\pi}{(2\ell-1)} \end{aligned} \tag{8}$$

onde M foi definido acima e $N = 8/\pi^2$. Conclui-se, então, que o teste-M de Weierstrass permite concluir que a séries $\displaystyle\sum_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial t}$ é absoluta e uniformemente convergente. O teorema sobre a diferenciabilidade termo-a-termo de séries de funções pode agora ser aplicado para obter o resultado sobre a diferenciabilidade de $u(t,x)$ em relação a t. Já no caso da diferenciabilidade de $u(t,x)$ em ordem a x o mesmo argumento não pode ser usado visto que o teste-M de Weierstrass não é aplicável à melhor majoração que conseguimos obter, (8). Consequentemente o teste não é aplicável para o estudo da diferenciabilidade de $u(t,x)$ em ordem a x, ou seja, dos termos u_{xx} e u_{xxtt} da equação.

Quanto a $\dfrac{\partial^2 u_\ell}{\partial t^2}$ observe-se que

$$\left|\frac{\partial^2 u_\ell}{\partial t^2}\right| \leq \frac{8}{(2\ell-1)^2\pi^2}\sqrt{\frac{\alpha^2(2\ell-1)^2\pi^2}{1+\beta^2(2\ell-1)^2\pi^2}} \leq \frac{\tilde{M}}{(2\ell-1)^2} \tag{9}$$

com $\tilde{M} = \dfrac{8}{\pi^2}\sup_\ell \sqrt{\dfrac{\alpha^2(2\ell-1)^2\pi^2}{1+\beta^2(2\ell-1)^2\pi^2}}$. Tal como com (7), o teste-M de Weierstrass é aplicável e a série $\sum_\ell \frac{\partial^2 u_\ell}{\partial t^2}$ é uniformemente convergente.

Concluindo: utilizando o teste-M de Weierstrass podemos obter resultados quanto à continuidade da solução formal e quanto à sua diferenciabilidade em ordem a t (a saber, u_t e u_{tt}) mas *não* em ordem a x (nomeadamente u_{xx} e u_{xxtt}).

4.

Iremos considerar um modelo muito simplificado de uma descarga radioactiva num rio.

Considere-se um trecho de comprimento $L > 0$ de um rio e suponha-se que a velocidade média das águas é constante e igual a $c > 0$. O rio é representado matematicamente pelo intervalo $[0, L]$, sendo a foz localizada em $x = L$. Numa das margens, entre as posições $x = L/100$ e $x = L/50$, está implantada uma central nuclear. Considere-se que uma descarga acidental da central lança no rio um nucleótido radioactivo U com constante de decaimento $\lambda > 0$ e com constante de difusão na água $\mathcal{D} > 0$.

Sendo $u(x,t)$ a concentração de U no instante t e posição no rio x, a equação que modela a dispersão de U é a seguinte equação de difusão-convexão-reacção

$$u_t = \mathcal{D}u_{xx} - cu_x - \lambda u, \qquad (x,t) \in]0, L[\times\mathbb{R}^+ \tag{10}$$

com condição de Dirichlet homogénea na fronteira.

1.a) **Sejam α e β duas constantes reais e considere a função $v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\alpha x+\beta t}u(x,t)$. Mostre que $u(x,t)$ é solução de (10) se e só se $v(x,t)$ fôr solução da equação**

$$v_t = \mathcal{D}v_{xx} - (c + 2\alpha\mathcal{D})v_x + (\beta + \mathcal{D}\alpha^2 + c\alpha - \lambda)v.$$

b) **Determine α e β de modo a que a equação para v seja $v_t = \mathcal{D}v_{xx}$ e identifique a condição na fronteira correspondente.**

c) **Determine a solução geral formal do problema da alínea anterior.**

2. **No instante $t = 0$ a descarga da central provoca o aparecimento do nucleótido U no rio com concentração $u(x,0) = u_0\chi_{[L/100,L/50]}(x)$, onde $u_0 > 0$ é uma constante e $\chi_A(x)$ é a função característica do conjunto A.**

a) **Determine a condição inicial $v(x,0)$ para o problema da alínea 1.b).**

b) **Determine a solução formal do problema da alínea 1.b) correspondente à condição inicial que obteve na alínea anterior.**

c) **Obtenha a solução formal do problema para $u(x,t)$ originalmente colocado.**

Resolução:

1.a) Sendo $v(x,t) = e^{\alpha x+\beta t}u(x,t)$ tem-se $u(x,t) = e^{-\alpha x-\beta t}v(x,t)$ e portanto

$$\begin{aligned}
u_t &= -\beta e^{-\alpha x-\beta t}v + e^{-\alpha x-\beta t}v_t \\
u_x &= -\alpha e^{-\alpha x-\beta t}v + e^{-\alpha x-\beta t}v_x \\
u_{xx} &= \alpha^2 e^{-\alpha x-\beta t}v - 2\alpha e^{-\alpha x-\beta t}v_x + e^{-\alpha x-\beta t}v_{xx}
\end{aligned}$$

concluindo-se que a equação (10) é equivalente a

$$\begin{aligned}
(-\beta v + v_t)e^{-\alpha x-\beta t} &= \mathcal{D}e^{-\alpha x-\beta t}\left(\alpha^2 v - 2\alpha v_x + v_{xx}\right) - \\
&\quad -ce^{-\alpha x-\beta t}(-\alpha v + v_x) - \\
&\quad -\lambda e^{-\alpha x-\beta t}v,
\end{aligned}$$

ou seja, dividindo ambos os membros por $e^{-\alpha x-\beta t}$,

$$-\beta v + v_t = \mathcal{D}\alpha^2 v - 2\alpha\mathcal{D}v_x + \mathcal{D}v_{xx} + \alpha c v - cv_x - \lambda v.$$

Rearranjando os termos desta equação tem-se

$$v_t = \mathcal{D}v_{xx} - (c + 2\alpha\mathcal{D})v_x + (\beta + \mathcal{D}\alpha^2 + \alpha c - \lambda)v,$$

como se pretendia.

b) Há que escolher α e β de modo a que

$$\begin{cases} c + 2\alpha\mathcal{D} = 0 \\ \beta + \mathcal{D}\alpha^2 + \alpha c - \lambda = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{c}{2\mathcal{D}} \\[2ex] \beta = \lambda + \dfrac{c^2}{4\mathcal{D}}. \end{cases}$$

Atendendo a que a condição na fronteira para u é de Dirichlet homogénea, a condição na fronteira para v é do mesmo tipo:

$$\hat{x} \in \{0, L\} \Longrightarrow v(\hat{x},t) = e^{\alpha\hat{x}+\beta t}u(\hat{x},t) = 0.$$

c) Tendo agora o problema

$$\begin{cases} v_t = \mathcal{D}v_{xx}, & (x,t) \in]0,L[\times\mathbb{R}^+ \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

iremos recorrer ao método de separação de variáveis. Fazendo $v(x,t) = X(x)T(t)$ vem $v_t = XT'$ e $v_{xx} = X''T$ pelo que a equação diferencial vem $XT' = \mathcal{D}X''T$, ou seja, supondo que $v = XT$ não se anula em $]0,L[\times\mathbb{R}^+$,

$$\frac{1}{\mathcal{D}}\frac{T'}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x), \qquad (x,t) \in]0,L[\times\mathbb{R}^+$$

e portanto terá de existir uma constante real σ, independente de t e de x, tal que

$$\frac{1}{\mathcal{D}}\frac{T'}{T}(t) = \sigma = \frac{X''}{X}(x), \qquad (x,t) \in]0,L[\times\mathbb{R}^+$$

o que resulta no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} &X'' - \sigma X = 0 \\ &T' - \sigma\mathcal{D}T = 0. \end{aligned}$$

As condições na fronteira para $v(x,t)$ fornecem o seguinte

$$\begin{aligned} 0 = v(0,t) = X(0)T(t) \quad &\Longrightarrow \quad X(0) = 0 \\ 0 = v(L,t) = X(L)T(t) \quad &\Longrightarrow \quad X(L) = 0 \end{aligned}$$

uma vez que $T(t) \neq 0$ em $\mathbb{R}^+$. Obtemos assim o seguinte problema de valores na fronteira para X :

$$\begin{cases} X'' - \sigma X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Estudaremos de seguida a possibilidade de obtenção de soluções *não-triviais* (não identicamente nulas) deste problema:

- Considere-se $\sigma = 0$. A equação diferencial fica reduzida a $X'' = 0$ cujas soluções são $X(x) = ax + b$ e atendendo às condições na fronteira $0 = X(0) = b$ e $0 = X(L) = aL + b$ conclui-se imediatamente que $a = b = 0$ e portanto a única solução do problema é a solução trivial $X(x) \equiv 0$.
- Seja agora $\sigma > 0$. A solução geral da equação é $X(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a + b$ e $0 = X(L) = ae^{\sqrt{\sigma}L} + be^{-\sqrt{\sigma}L}$ cuja única solução é $a = b = 0$ fornecendo como única solução da equação a função identicamente nula $X(x) \equiv 0$.
- Finalmente tome-se $\sigma < 0$. A solução geral real da equação diferencial é agora $X(x) = a\cos\sqrt{|\sigma|}x + b\sin\sqrt{|\sigma|}x$. Atendendo às condições na fronteira tem-se $0 = X(0) = a\cos 0 + b\sin 0 = a$ e portanto $0 = X(L) = 0\cos\sqrt{|\sigma|}L + b\sin\sqrt{|\sigma|}L = b\sin\sqrt{|\sigma|}L$ concluindo-se que, ou $b = 0$ e obtemos a solução $X(x) \equiv 0$, ou $\sin\sqrt{|\sigma|}L = 0$, isto é, $\sqrt{|\sigma|} = \sqrt{|\sigma_k|} = \frac{k\pi}{L}, k \in \mathbb{N}_1$, obtendo-se assim infinitas soluções do problema de valores na fronteira, em particular as funções $X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}_1$, e todas as combinações lineares de um número finito destas funções.

Atendendo a que $\sigma = \sigma_k = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$ a equação para $T(t)$ pode-se escrever como

$$T' + \frac{k^2\pi^2\mathcal{D}}{L^2}T = 0,$$

para a qual uma base do espaço das soluções é constituida pela função

$$T_k(t) = \exp\left[-\frac{k^2\pi^2\mathcal{D}t}{L^2}\right].$$

Assim, a solução formal geral do problema dado é

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-k^2\pi^2 L^{-2}\mathcal{D}t}.$$

2.a) A condição inicial para v será

$$v(x,0) = e^{\alpha x}u(x,0) = u_0 e^{\alpha x}\chi_{[L/100,L/50]}(x) = \begin{cases} u_0 e^{\alpha x}, & \text{se } x \in [L/100, L/50] \\ 0, & \text{se } x \in [0,L] \setminus [L/100, L/50] \end{cases}$$

b) Atendendo à solução geral formal obtida na alínea 1c) tem-se

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{11}$$

pelo que os coeficientes b_k terão de ser escolhidos de modo a que a série no membro direito de (11) seja a série de Fourier de senos, de período $2L$, da função $v(x,0)$ dada na alínea anterior. Atendendo a isto há que prolongar $v(x,0)$ a $\mathbb{R}$ como uma função ímpar de período $2L$. Assim tem-se

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{L}\int_0^L v(x,0)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx \\ &= \frac{2}{L}\int_{L/100}^{L/50} u_0 e^{\alpha x}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx \\ &\quad \text{(integrando por partes duas vezes)} \\ &= \frac{2k\pi u_0}{k^2\pi^2 + L^2\alpha^2}\left[e^{\alpha L/50}\left(\frac{\alpha L}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{50} - \cos\frac{k\pi}{50}\right) - e^{\alpha L/100}\left(\frac{\alpha L}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{100} - \cos\frac{k\pi}{100}\right)\right] \end{aligned}$$

e a solução formal pretendida é

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi u_0}{k^2\pi^2 + L^2\alpha^2}\left[e^{\alpha L/50}\left(\frac{\alpha L}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{50} - \cos\frac{k\pi}{50}\right) - e^{\alpha L/100}\left(\frac{\alpha L}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{100} - \cos\frac{k\pi}{100}\right)\right] \cdot \\ &\qquad \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-k^2\pi^2 L^{-2}\mathcal{D}t}. \end{aligned}$$

c) A solução formal do problema original será simplesmente o produto da solução $v(x,t)$ indicada acima por

$$\exp\left[-\frac{c}{2\mathcal{D}}x + \left(\lambda + \frac{c^2}{4\mathcal{D}}\right)t\right].$$

5.

Considere o seguinte problema para a equação das ondas unidimensional

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u(t,0) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = 0, \;\; u_t(0,x) = f(x) & x > 0 \end{cases} \tag{12}$$

onde $f(x)$ **é uma função de classe** $\mathcal{C}^1$ **definida em** $\mathbb{R}^+$.

a) **Utilizando a mudança de variáveis** $(t,x) \mapsto (\xi,\eta)$ **definida por** $\xi = x+t,\ \eta = x-t$, **e sendo** $v(\xi,\eta) = v(\xi(t,x),\eta(t,x)) \stackrel{\text{def}}{=} u(t,x)$, **prove que a equação das ondas** $u_{tt} = u_{xx}$ **é transformada em** $v_{\xi\eta} = 0$.

b) **Prove que a solução geral da equação transformada tem a forma**

$$v(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

onde F **e** G **são funções arbitrárias.**

c) **Utilize as condições iniciais e de fronteira do problema (12) para obter as expressões de** F **e** G **em termos dos dados do problema.**

d) **Determine a solução de (12).**

Resolução:

a) Atendendo à mudança de variáveis dada e à relação entre v e u tem-se, pelo teorema de derivação das funções compostas

$$\begin{aligned} u_t &= v_\xi \xi_t + v_\eta \eta_t = v_\xi - v_\eta \\ u_{tt} &= (v_\xi - v_\eta)_t = (v_\xi - v_\eta)_\xi\, \xi_t + (v_\xi - v_\eta)_\eta\, \eta_t = \\ &= v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi + v_\eta \\ u_{xx} &= (v_\xi + v_\eta)_x = (v_\xi + v_\eta)_\xi\, \xi_x + (v_\xi + v_\eta)_\eta\, \eta_x = \\ &= v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

pelo que a equação $u_{tt} = u_{xx}$ escreve-se agora

$$v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta},$$

ou seja,

$$v_{\xi\eta} = 0.$$

b) Considere-se a equação $v_{\xi\eta} = 0$, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Sendo esta equação válida para todos os pontos de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ conclui-se que $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ não pode depender de ξ e portanto

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \tilde{G}(\eta)$$

para alguma função $\tilde{G}$. Integrando esta última equação tem-se

$$v(\xi, \eta) = \int \tilde{G}(\eta) d\eta + F(\xi)$$

onde $F(\xi)$ é uma função só de ξ, e portanto é constante para a integração em η. Designando $\int \tilde{G}(\eta) d\eta$ por $G(\eta)$ conclui-se, então, que a solução geral da equação é $v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$.

c) Utilizando as condições de fronteira de (12) tem-se

$$\begin{array}{l} 0 = u(0, x) = v(x, x) = F(x) + G(x), \quad x > 0 \\ f(x) = u_t(0, x) = v_\xi(x, x) - v_\eta(x, x) = F'(x) - G'(x), \quad x > 0. \end{array}$$

Da primeira condição tem-se

$$F(x) = -G(x) \implies F'(x) = -G'(x)$$

e portanto, substituindo na segunda condição, vem $-2G'(x) = f(x)$, $x > 0$. Integrando ambos os membros desta igualdade entre 0 e um valor de x arbitrário positivo obtém-se

$$G(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x f(s) ds - K, \quad x > 0,$$

onde $K \stackrel{\text{def}}{=} G(0)$, e

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^x f(s) ds + K, \quad x > 0.$$

Observe-se que $\eta = x - t$ pode ser negativo para $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ pelo que há que conhecer a expressão de $G(\eta)$ para $\eta < 0$ (a expressão de G dada acima é apenas válida para valores positivos do seu argumento). Utilizando a condição inicial em (12) tem-se

$$0 = u(t, 0) = v(t, -t) = F(t) + G(-t), \quad t > 0,$$

pelo que se conclui que $G(t) = -F(-t)$ para $t < 0$. Tem-se, portanto,

$$G(\eta) = -\frac{1}{2}\int_0^{-\eta} f(s) ds - K, \ \ \eta < 0.$$

As expressões pretendidas são, então, as seguintes:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\xi} f(s)ds + K, \qquad \xi > 0 \\ G(\eta) &= -\tfrac{1}{2}\int_0^{|\eta|} f(s)ds - K, \quad \forall \eta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

d) Como a solução do problema é $u(t,x) = v(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta) = F(x+t) + G(x-t)$ com as expressões de F e G determinadas na alínea anterior conclui-se imediatamente que

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\int_{|x-t|}^{x+t} f(s)ds.$$