

Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 9

1) Determine a solução da equação escalar linear:

$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + y - 2 = b(t),$$

que verifica as condições iniciais:

$$y(0) = y'(0) = 0, y^{(2)}(0) = 1,$$

quando:

- i) $b(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.
- ii) $b(t) = t, \forall t \in \mathbb{R}$.
- iii) $b(t) = e^t, \forall t \in \mathbb{R}$.

2) Considere a equação

$$y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5y' = 0.$$

- i) Determine a sua solução geral.
- ii) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções convergentes quando $t \rightarrow +\infty$.

3) Seja $k > 0$. Para que valores de $c \in \mathbb{R}$ é que a equação:

$$y^{(2)} - 2cy' + y = 0$$

admite uma solução satisfazendo $y(0) = y(2k\pi) = 0$, que não seja identicamente nula?

4) Considere a equação

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y^{(2)} = t + \cos t \tag{1}$$

4.1) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (1)

4.2) Determine uma solução particular de (1)

4.3) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição $y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$.

5) Sejam $a_j(t)$ funções reais de variável real tais que $a_j(\cdot) \in \mathcal{C}^j(\mathbb{R})$. Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n ,

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t), \tag{2}$$

diz-se exacta se e só se existirem funções reais de variável real $A_j(t)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, tais que

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=0}^{n-1} A_j x^{(j)} \right) = \sum_{j=0}^n a_j x^{(j)}.$$

5.1.a) Mostre que (2) é exacta se e só se

$$\begin{aligned}a_0 &= A'_0 \\a_j &= A'_j + A_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \\a_n &= A_{n-1}\end{aligned}$$

5.1.b) Conclua que (2) é exacta se e só se

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} a_j^{(j)} = 0.$$

5.2) Considere a equação diferencial

$$(1 + t + t^2)x''' + (3 + 6t)x'' + 6x' = \cos t \quad (3)$$

5.2.a) Mostre que (3) é exacta.

5.2.b) Utilizando o resultado da alínea anterior, primitive a equação (3) e mostre que a equação resultante é também exacta.

5.2.c) Repetindo o processo da alínea anterior, determine a solução geral de (3).