Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

TESTE 1 – 28 DE MARÇO DE 2003 – 18:10-19H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das oito alíneas vale 2.5 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- **A revisão de provas** é na 4ª feira, 2 de Abril, 11h-12h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Fórmulas de Análise Complexa

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}} \ , \ k = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad \mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\, dz$$ (fórmulas integrais de Cauchy)

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\, dz$$ (coeficientes das séries de Taylor e de Laurent)

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$$ (resíduo num pólo de ordem n)

Para a correcção

pergunta	classificação
1(a)	
1(b)	
1(c)	
2(a)	
2(b)	
3(a)	
3(b)	
3(c)	
total	

Nº:

Sala: ____________

Nome: ______________________________

(1) Considere a função
$$u(x,y) = e^{2x}\cos 2y \ .$$
(a) Mostre que u é harmónica.

(b) Determine uma função analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cuja parte real seja u e com $f(0) = 1$.

(c) Calcule o integral de $\dfrac{f(z)}{z(z-4)}$ ao longo da elipse $x^2 + 2y^2 = 4$ percorrida no sentido positivo, onde f é a função da alínea anterior.

(2) Seja γ a circunferência $|z| = 2$ percorrida uma vez no sentido positivo.

(a) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \sinh z^3 \, dz$.

(b) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(2z-1)^2} \, dz$.

(3) Seja f a função definida por $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4z + 1}$.

(a) Determine e classifique as singularidades de f.

(b) Calcule $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\,dz$, onde γ é a circunferência de raio 1 centrada na origem percorrida uma vez no sentido positivo. (Recorde que $\sqrt{3} \simeq 1.73$.)

(c) Utilize o resultado da alínea anterior para calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}\, d\theta \ .$$