Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

TESTE 2 – VERSÃO A – 16/MAIO/2003 – RESOLUÇÃO

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das oito alíneas vale 2.5 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- **A revisão de provas** é na 4ª feira, 21 de Maio, 11h-12h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Fórmulas de EDO's

Fórmulas de variação das constantes:

$$y(t) = e^{\int a(t)\,dt}\left(c + \int e^{-\int a(t)\,dt} b(t)\,dt\right) \ , \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = e^{At}c + \int^t e^{A(t-s)} b(s)\,ds \ , \qquad c \in \mathbb{R}^n$$

Aniquiladores:

$$(D-a)^{k+1}\left(t^k e^{at}\right) = 0$$

$$\left[(D-a)^2 + b^2\right]^{k+1}\left(t^k e^{at}\cos bt\right) = 0$$

Para a correcção

pergunta	classificação
1	
2(a)	
2(b)	
3(a)	
3(b)	
4(a)	
4(b)	
5	
total	

Nº:

Sala: ________________

Nome: ____

(1) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{y} = e^{3(t-y)} \\ y(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Resolução: *A equação diferencial é separável:*

$$\begin{aligned} \dot{y} = e^{3(t-y)} \quad &\iff \quad e^{3y}\dot{y} = e^{3t} \\ &\iff \quad \int e^{3y}\,dy = \int e^{3t}\,dt + c \ , \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad \tfrac{1}{3}e^{3y} = \tfrac{1}{3}e^{3t} + c \ , \quad c \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad e^{3y} = e^{3t} + k \ , \quad k \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad y = \tfrac{1}{3}\ln\left(e^{3t} + k\right) \ , \quad k \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

Para que $y(0) = 0$, *tem que ser* $0 = \frac{1}{3}\ln(1+k)$ *pelo que* $k = 0$. *Logo, a solução é* $y(t) = \frac{1}{3}\ln e^{3t}$, *ou seja,* $y(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
□

(2) (a) Para a equação diferencial

$$y^2 + 4y + (ty + 2t)\dot{y} = 0$$

ache um factor de integração da forma $\mu = \mu(t)$.

Resolução: *Se $\mu(t)$ é um factor de integração, então a equação*

$$(y^2 + 4y)\mu + (ty + 2t)\mu\dot{y} = 0$$

é exacta, pelo que $\frac{\partial}{\partial y}\left((y^2 + 4y)\mu\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left((ty + 2t)\mu\right)$*, ou seja,*

$(2y+4)\mu = (y+2)\mu + (ty+2t)\dot{\mu} \iff (ty+2t)\dot{\mu} = (y+2)\mu$,

o que para $y \neq -2$ *fica*

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \frac{1}{t} \ .$$

Primitivando obtém-se $\ln|\mu| = \ln|t| + c$, $c \in \mathbb{R}$. *Então, por exemplo,* $\mu(t) = t$ *para* $t \neq 0$ *é um factor de integração.* □

(b) Resolva a equação diferencial da alínea anterior.
(Não é necessário indicar os intervalos de definição.)

Resolução: *Muitiplicando a equação por* $\mu(t) = t$ *obtém-se a equação exacta*

$$\underbrace{ty^2 + 4ty}_{M} + \underbrace{(t^2y + 2t^2)}_{N}\dot{y} = 0 \ ,$$

cuja solução é $F(t, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, *onde* F *satisfaz*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = M \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N \end{cases} \iff \begin{cases} F(t, y) = \int (ty^2 + 4ty)\, dt + c_1(y) \\ F(t, y) = \int (t^2y + 2t^2)\, dy + c_2(t) \end{cases}$$

$$\iff F(t, y) = \frac{1}{2}t^2y^2 + 2t^2y + k \ , \ k \in \mathbb{R} \ .$$

Assim, as soluções $y(t)$ *da equação dada satisfazem para* $t \neq 0$:

$$t^2y^2 + 4t^2y + c = 0 \iff y(t) = -2 \pm \sqrt{4 - \frac{c}{t^2}} \ .$$

□

(3) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} .$$

(a) Escreva a matriz e^{At}.

Resolução: *Como A é um bloco de Jordan 2×2 para o valor $\lambda = 7$, fica*

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{7t} & te^{7t} \\ 0 & e^{7t} \end{bmatrix} .$$

□

(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{7t} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Resolução: *Pela fórmula de variação das constantes,*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{7s} \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} (t-s)e^{7t} \\ e^{7t} \end{bmatrix} ds \; = \; \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} e^{7t} \\ te^{7t} \end{bmatrix} , \ \forall t \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

□

(4) (a) Determine a solução geral da equação $y^{(3)} = y$.

Resolução: *O polinómio característico da equação* $y^{(3)} - y = 0$ *é*

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

cujas raízes são 1, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ *e* $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. *Logo, a solução geral da equação é*

$$c_1 e^t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \ , \ \forall t \in \mathbb{R} \ , \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \, .$$

□

(b) Seja $y(t)$ uma solução da equação $y^{(3)} = y$ com a propriedade $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$. Determine constantes reais a, b e c tais que

$$y^{(2)} + a\dot{y} + by + c = 0 \ .$$

Resolução: *De acordo com a alínea anterior, uma solução com esse limite é da forma* $y(t) = c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$ *e solução da equação* $(D^2 + D + 1)y = 0$. *Toma-se pois* $a = 1$, $b = 1$ *e* $c = 0$. □

(5) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^{(2)} = (\dot{y})^3 \sin y \\ y(0) = 0 \ , \quad \dot{y}(0) = 1 \ . \end{cases}$$

Resolução: *Sendo $\dot{y} = v(y)$, tem-se*

$$y^{(2)} = \frac{d}{dt}(v(y)) = \frac{dv}{dy}\dot{y} = \frac{dv}{dy}v \ .$$

A equação diferencial dada fica

$$\frac{dv}{dy}v = v^3 \sin y \ .$$

Para $v \neq 0$ (neste problema de valor inicial $\dot{y}(0) = 1 \neq 0$), esta equação separável é equivalente a

$$\frac{\frac{dv}{dy}}{v^2} = \sin y \iff -\frac{1}{v} = -\cos y + c \iff v = \frac{1}{\cos y + c} \ .$$

Quando $y = 0$ tem-se $v = \dot{y} = 1$, pelo que $c = 0$. De $v = \frac{1}{\cos y}$, deduz-se, para $\cos y \neq 0$, que

$$\dot{y} = \frac{1}{\cos y} \iff \dot{y}\cos y = 1 \iff \int \cos y \, dy = \int dt + c$$

$$\iff \sin y = t + c \iff y = \arcsin(t + c) \ .$$

Como $y(0) = 0$, conclui-se que $c = 0$ e que a solução é

$$y(t) = \arcsin t \ , \quad \forall t \in]-1, 1[\ .$$

$\square$