Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

TESTE 2 – 16 DE MAIO DE 2003 – 18:10-19H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das oito alíneas vale 2.5 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- **A revisão de provas** é na 4ª feira, 21 de Maio, 11h-12h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Fórmulas de EDO's

Fórmulas de variação das constantes:

$$y(t) = e^{\int a(t)\,dt}\left(c + \int e^{-\int a(t)\,dt} b(t)\,dt\right), \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = e^{At}c + \int^t e^{A(t-s)} b(s)\,ds, \qquad c \in \mathbb{R}^n$$

Aniquiladores:

$$(D-a)^{k+1}\left(t^k e^{at}\right) = 0$$

$$\left[(D-a)^2 + b^2\right]^{k+1}\left(t^k e^{at}\cos bt\right) = 0$$

Para a correcção

pergunta	classificação
1(a)	
1(b)	
2(a)	
2(b)	
3(a)	
3(b)	
4	
5	
total	

Nº:

Sala: ____________________

Nome: ____

(1) (a) Para a equação diferencial
$$y^2 - 4y + (ty - 2t)\dot{y} = 0$$
ache um factor de integração da forma $\mu = \mu(t)$.

(b) Resolva a equação diferencial da alínea anterior.

(2) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

(a) Escreva a matriz e^{At}.

(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

(3) (a) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y^{(2)} - \dot{y} - 2y = e^t \ .$$

(b) Seja k um inteiro positivo. Para que valores de $c \in \mathbb{R}$ é que a equação

$$y^{(2)} - 2c\dot{y} + y = 0$$

admite uma solução satisfazendo $y(0) = y(2k\pi) = 0$ que não seja identicamente nula?

(4) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^{(2)} = (\dot{y})^3 \sin y \\ y(0) = 0 \ , \quad \dot{y}(0) = 1 \ . \end{cases}$$

(5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Mostre que qualquer solução de $\dot{y} = f(y(t))$ é monótona.