

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

TESTE 3 – 6 DE JUNHO DE 2003 – 13:10-14H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das cinco alíneas vale 4 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras.
- **A revisão de provas** é na 4ª feira, 11 de Junho, 11h-12h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Fórmulas para Transformadas de Laplace

Sendo $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$, $\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}F(s)$,
 $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$, $\mathcal{L}\{H_c(t)f(t - c)\} = e^{-cs}F(s)$.
 $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, $\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}$, $\mathcal{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}$, $\mathcal{L}\{\delta_c(t)\} = e^{-cs}$.

Fórmulas para Séries de Fourier

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$.
 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$, $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx$, $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx$.

Para a correcção

pergunta	classificação
1(a)	
1(b)	
2(a)	
2(b)	
3	
total	

Nº:

Sala: _____

Nome: _____

(1) (a) Calcule a transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

(b) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^{(2)} + y = f(t) \\ \dot{y}(0) = 1, y(0) = 1, \end{cases}$$

onde $f(t)$ é a função da alínea anterior.

- (2) (a) Ache o desenvolvimento em série senos da função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1, \forall x \in [0, 1]$.

- (b) Determine a solução (satisfazendo a equação diferencial para $t > 0$ e $0 < x < 1$) do seguinte problema para a equação do calor:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 5 , \\ u(0, x) = 7 . \end{cases}$$

(3) Calcule a transformada de Laplace da função

$$\frac{e^{-t} - 1}{t}, \quad t > 0.$$

Sugestão: Use as propriedades da transformada de Laplace.