Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 4/6/2003

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

INDICAÇÕES PARA A SOLUÇÃO DO TESTE 3 PARA PRATICAR

disponível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIV`

(1) (a) Como se pode escrever $f(t) = -2\sin t(1 - H_{2\pi}(t) + H_{4\pi}(t) - H_{6\pi}(t))$, a sua transformada de Laplace é

$$-\frac{2}{s^2+1}\left(1 - e^{-2\pi s} + e^{-4\pi s} - e^{-6\pi s}\right) .$$

(b) Seja $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, onde $y(t)$ é a solução do PVI. Aplica-se a transformada de Laplace a ambos os membros da equação e usa-se o resultado da alínea anterior:

$$\begin{aligned} & (s-1)Y(s) - y(0) = -\frac{2}{s^2+1}\left(1 - e^{-2\pi s} + e^{-4\pi s} - e^{-6\pi s}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & Y(s) = \left(\frac{s+1}{s^2+1} - \frac{1}{s-1}\right)\left(1 - e^{-2\pi s} + e^{-4\pi s} - e^{-6\pi s}\right) . \end{aligned}$$

A função contínua com esta transformada de Laplace e definida para $t \geq 0$ é

$$\begin{aligned} y(t) \quad = \quad & (\cos t + \sin t)(1 - H_{2\pi}(t) + H_{4\pi}(t) - H_{6\pi}(t)) \\ & - e^t(1 - e^{-2\pi}H_{2\pi}(t) + e^{-4\pi}H_{4\pi}(t) - e^{-6\pi}H_{6\pi}(t)) . \end{aligned}$$

(2) (a) Os coeficientes do desenvolvimento de g em série de co-senos no intervalo $[0, \pi]$ são dados por

$$\begin{aligned} a_n \quad &= \quad \tfrac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx\, dx\right) \\ &= \quad \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par ,} \\ (-1)^k \frac{4}{\pi(2k+1)} & \text{se } n = 2k+1 \text{ é ímpar .} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, a série de co-senos de g no intervalo $[0, \pi]$ é $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} \cos(2k+1)x$.

(b) Primeiro calcula-se as soluções (não triviais) da EDP da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Verifica-se que os factores $X(x)$ e $Y(y)$ devem satisfazer as equações $X^{(2)}(x) = kX(x)$ e $Y^{(2)}(y) = -kY(y)$ onde $k \in \mathbb{R}$. Depois, ao impôr às soluções deste tipo as condições na fronteira da variável x, conclui-se que só há soluções não identicamente nulas quando $k = -n^2$ onde $n = 0, 1, 2, \ldots$, que $X(x)$ deve ser múltiplo de $\cos nx$ e que $Y(y)$ deve ser combinação linear de $\cosh ny$ e de $\sinh ny$. A condição em $y = 0$ impõe que os termos com $\sinh ny$ não ocorram, pelo que a solução será da forma $u(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos nx \cosh ny$. A condição em $y = \frac{\pi}{2}$ impõe que os c_n's satisfaçam

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(nx) \cdot n \sinh(n\frac{\pi}{2}) = g(x) \ .$$

Comparando com a alínea anterior, $c_n \cdot n \sinh(n\frac{\pi}{2}) = a_n$, $n > 0$, e $c_0 \in \mathbb{R}$, portanto as soluções são

$$u(x,y) = c_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)^2 \sinh(\frac{(2k+1)\pi}{2})} \cos[(2k+1)x] \cosh[(2k+1)y] \ , \quad \text{onde } c_0 \in \mathbb{R}.$$

(3) O desenvolvimento de h em série de senos converge em $x = \frac{1}{2}$ para

$$\frac{1}{2}(\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} + \lim_{x\to\frac{1}{2}^-}) = \frac{1}{2} \ .$$

Como as parcelas do somatório correspondentes a n par anulam-se em $x = \frac{1}{2}$, fica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)}{n\pi} \sin(\frac{n\pi}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\iff \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) - \cos((2k+1)\pi)\right)}{(2k+1)\pi} (-1)^k = \frac{1}{2}$$

$$\iff \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} (-1)^k = \frac{1}{2}$$

$$\iff \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} \ .$$