Université Louis Pasteur
U.F.R. de Mathématique et Informatique
D.E.U.G. 2[ieme] année
Analyse M3

2000/2001

Feuille N°1 - Séries de Fourier

Dans tout ce qui suit, E désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques et continues par morceaux. On note par $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ la forme sesquilinéaire positive donnée par :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt,$$

et on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, e_n désigne la fonction exponentielle définie par $t \in \mathbb{R} \mapsto e_n(t) = e^{int}$. Rappelons que pour $f \in E$, les coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de f, la série de Fourier $S(f)$ de f, et la somme partielle de Fourier $S_N(f)$ d'ordre $N \in \mathbb{N}$ de f sont définies par :

$$c_n(f) = < f, e_n >, \quad S(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n \quad \text{et} \quad S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n.$$

Exercice 1. Coefficients de Fourier réels
Soit $f \in E$ à valeurs réelles. On définit les coefficients de Fourier réels $(a_n(f))_{n\geqslant 0}$ et $(b_n(f))_{n\geqslant 1}$ de f par :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \quad \text{et} \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

(i) Exprimer les relations entre les coefficients de Fourier complexes et réels.

(ii) Ecrire la série et les sommes partielles de Fourier de f à l'aide des coefficients de Fourier réels de f.

(iii) Montrer que si f est paire, alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.
Montrer que si f est impaire, alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$.

(iv) Ecrire l'égalité de Parceval pour f à l'aide des coefficients de Fourier réels.

(v) Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n(f) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0$.
Montrer que si f est de classe C^p avec $p \geqslant 1$, alors $\lim_{n\to\infty} n^p a_n(f) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} n^p b_n(f) = 0$.

(vi) Exprimer les coefficients de Fourier réels de f_τ en fonction de ceux de f, où f_τ est la fonction translatée de f par $\tau \in \mathbb{R}$ définie par $f_\tau(t) = f(t - \tau)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Etude des applications T-périodiques
Expliquer comment l'étude d'une fonction T-périodique (avec $T \in \mathbb{R}_+^*$) peut se ramener à celle d'une fonction 2π-périodique. Définir les coefficients de Fourier (complexes et réels) et la série de Fourier d'une fonction T-périodique continue par morceaux. Ecrire l'égalité de Parceval dans ce cadre.

Exercice 3.
Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie par :

(i) f paire, $f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}$ pour $t \in [0, \pi]$.

(ii) $f(t) = e^{zt}$ pour $t \in [0, 2\pi[$, où $z \in \mathbb{C}$.

(iii) $f(t) = \sup(\sin(t), 0)$ pour $t \in [0, 2\pi[$.

En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Exercice 4.
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions 2π-périodiques continues par morceaux.

(i) Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,dt = a_0(f)\,a_0(g) + \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n(f)\,a_n(g) + b_n(f)\,b_n(g)}{2}$.

(ii) En déduire que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,(\pi - t)\,dt = 2\pi \sum_{n\geqslant 1} \frac{b_n(f)}{n}$.

Exercice 5.
Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n\, z^n$ une série entière à coefficients complexes, de rayon de convergence R.

(i) Soit $0 \leq r < R$. On définie $g_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $g_r(t) = f(r\,e^{i\,t})$ pour $t \in \mathbb{R}$.
Calculer les coefficients de Fourier de g_r.

(ii) Montrer que si $R = +\infty$ et f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.

(iii) Montrer que si $R = 1$ et f est bornée sur $\overset{\circ}{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2$ converge.

Exercice 6.
Calculer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie sur $[-\pi, \pi]$ par :

(i) $f(\pi) = f(-\pi) = 0$ et $f(t) = t$ pour $t \in]-\pi, \pi[$.

(ii) $f(t) = t^2$.

(iii) $f(t) = |t|$.

En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Exercice 7.
Soit $f \in E$. Montrer que si f est de classe C^p avec $p \geqslant 2$, alors la série de Fourier de f converge uniformément (sur $\mathbb{R}$) vers f.

Exercice 8.
Soit a un nombre réel non nul. Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie par $f(t) = e^{at}$ pour $t \in [0, 2\pi[$. En déduire la formule :

$$\frac{\pi a}{\sinh(\pi a)} = 1 + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2+n^2}.$$

Exercice 9.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique continue. Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $\sigma_N(f) = \dfrac{S_0(f) + \cdots + S_N(f)}{N+1}$.

(i) Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\phi_N(x) = \displaystyle\frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=-k}^{k} e^{ikx}$.

Montrer que $\phi_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi(N+1)} \frac{\sin^2(\frac{N+1}{2}x)}{\sin^2(\frac{x}{2})} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{N+1}{2\pi} & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$.

(ii) Montrer que :

(a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sigma_N(t) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \phi_N(x) f(t+x)dx$.

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \phi_N(x)dx = 1$.

(c) Pour tout $\delta \in]0, \pi]$, $\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{-\delta} \phi_N(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} \phi_N(x)dx = 0$.

(d) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(t) - \sigma_N(t)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \phi_N(x)|f(t) - f(t+x)|dx$.

(iii) En déduire que $\sigma_N(f)$ converge uniformément (sur $\mathbb{R}$) vers f.