Université Louis Pasteur
U.F.R. de Mathématique et Informatique
D.E.U.G. 2$^{\text{ieme}}$ année
Analyse M3

2000/2001

Feuille N°2 - Intégrales à paramètre ou Fonctions définies par une intégrale

xercice 1.

1. Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) \;=\; e^{-x^2y}cos(x+y)$.
2. Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$ par :

$$1)\ f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad 2)\ f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \quad 3)\ f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

xercice 2.

1. Montrer que la fonction définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{(t+x)}dt$ est continue sur $]0,+\infty[$ et donner sa limite en 0.
2. Montrer que la fonction définie par $f(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-xu^2} cos(xu)du$ est continue sur $[0,+\infty[$ et donner sa limite à l'infini.

xercice 3.
Soient f et g définies sur $[0,\infty[$ par :

$$f(x) = \Big(\int_0^x e^{-t^2}dt\Big)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt.$$

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\infty[$ et donner leurs dérivées.
2. Calculer $f(0)$, $g(0)$ et leur limite à l'infini.
3. Vérifier que pour tout $x \in [0,\infty[\quad f'(x) + g'(x) = 0$
4. En déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$.

xercice 4.
Pour $x \in [0,1]$, $f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{log(1+x\ cost)}{cost}dt$

1. Monter que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et donner f'.
2. En considérant le changement de variable $u = tan(t/2)$ dans l'expression de f', vérifier que

$$\text{pour tout } x \in [0,1[, \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right).$$

3. Calculer, pour tout $t \in]0,\pi/2]$, $f'(cos(t))$
   En déduire f.

xercice 5.

On se donne une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, et on définit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{xf(u)}{x^2+u^2}du \quad \text{et} \quad F(0) = 0$$

1. Peut-on prolonger la fonction $(x,u) \mapsto \dfrac{xf(u)}{x^2+u^2}$ en une fonction continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$?
2. Monter que si $f(0) = 0$, alors F est continue en 0.
3. Si $f(0) \neq 0$, est-ce que F est continue en 0 ?

xercice 6.

Montrer la continuité de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1. $f(x) \ = \ \int_0^\infty \dfrac{e^{-x^2t}\sqrt{t}}{1+t^2}dt \qquad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) \ = \ \int_0^1 \dfrac{1}{t\sqrt{1-t^2}}ln(\dfrac{1+tx}{1-tx})dt \qquad I = [-1,1]$
3. $f(x) \ = \ \int_0^{+\infty} \dfrac{cos(xt)}{1+t^2}dt \qquad I = \mathbb{R}$
4. $f(x) \ = \ \int_0^1 \dfrac{sin(t)}{t+x}dt \qquad I = [0,+\infty[$
5. $f(x) \ = \ \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x^2t}}{1+t}dt \qquad I =]0,+\infty[$
6. $f(x) \ = \ \int_0^{+\infty} \dfrac{xe^{-xt}t^{3/2}}{1+t^2}dt \qquad I =]0,+\infty[$
7. $f(x) \ = \ \int_0^{+\infty} \dfrac{sin(xt)}{t\ (1+t^2)}dt \qquad I = \mathbb{R}$
8. $f(x) \ = \ \int_0^{+\infty} \dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}dt \qquad I =]0,+\infty[$

xercice 7.

Les intégrales suivantes sont-elles uniformément convergentes sur I ?

1. $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{sin(xt)}{t}dt \qquad I = [1,+\infty[$
2. $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{tsin(xt)}{1+t^2}dt \qquad I = [a,+\infty[, a > 0$
3. $F(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2t^2}dt \qquad I = [0,1]$

xercice 8.

Soit $f(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}cos(tx)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

1. Monter que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que f satisfait l'équation différentielle $2y' + xy = 0$, en déduire une expression explicite de$f$.

xercice 9.

On pose $I = [0,+\infty[$, pour $a > 0$ on pose $I_a = [a,+\infty[$. On considère les fonctions définies sur I :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{sint}{t+x}dt \qquad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I_a.
2. Monter que f est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $y + y'' = 1/x$.
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I_a.
4. Monter que g est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $y + y'' = 1/x$.
5. En considérant le changement de variable $u = t + x$, montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

6. En considérant le changement de variable $u = tx$, montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$
7. Résoudre l'équation differentielle sur $]0, +\infty[$ vérifiée par $h = f - g$.
8. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$.

xercice 10.
Pour tout entier n et tout $x > 0$, on pose $g_n(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(t^2 + x)^{n+1}}$.

1. Montrer que g_n est bien définie.
2. Evaluer g_0 et les dérivées $g_0^{(n)}$.
3. Montrer que chaque g_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et trouver la valeur de g_n.

xercice 11.

On considère $f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{arctan(ux)}{u(1 + u^2)} du$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée et en déduire f.

xercice 12.

On pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt} dt$ pour tout $x \geq 0$

1. Montrer que g est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$
2. Montrer que g est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $g''(x)$ pour $x > 0$
3. Trouver les limites de g et g' en $+\infty$.
4. En déduire que pour tout $x > 0$ $g(x) = -\frac{1}{4} \int_x^{+\infty} log\left(\dfrac{x^2}{x^2 + 4}\right) dx$
5. vérifier que cette intégrale et bien définie pour $wx = 0$, en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(\dfrac{sin(t)}{t}\right)^2 dt$
6. En déduire $\int_0^{+\infty} \dfrac{sin(t)}{t} dt$

xercice 13. (Juin 97)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{sin^2(xt)}{t^2(1 + t^2)} dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{sin^2 u}{u^2(1 + x^2u^2)} du.$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\dfrac{F(x)}{x} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{x^2 sin^2}{u^2(x^2 + u^2)} du$.
4. En déduire que $F(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi x}{2}$

   On admettra que $\int_0^{+\infty} \left(\dfrac{sin(t)}{t}\right)^2 dt = \dfrac{\pi}{2}$

xercice 14. (Septembre 97) Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t(1+t)}} dt$.

1. Montrer que F est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout $A > 0$, $\lim_{x \to 0^+} F(x) \geq \int_0^A \dfrac{dt}{\sqrt{t(1+t)}}$. En déduire que $\lim_{x \to 0^+} F(x) \;=\; +\infty$
3. Par un changement de variable, montrer que $F(x) \;=\; 2 \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u^2}}{\sqrt{u^2 + x}} du$.

   En déduire que $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} F(x) \;= 2 \;\; \lim_{y \to 0^+} \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u^2}}{\sqrt{yu^2 + 1}} du$.
4. Montrer que $F(x) \sim_{+\infty} \sqrt{\pi / x}$.
   On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \;=\; \sqrt{t}/2$.
5. Donner l'allure de F.

xercice 15.

Soit b un réel tel que $\mid b \mid < 1$. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \geq 0$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{e^{-x} b^n (-x)^{n-1}}{n!} \quad \text{et} \quad s_n(x) = \int_0^x u_1(t) dt + \ldots + \int_0^x u_n(t) dt.$$

1. Montrer que la série de terme général u_n converge uniformément sur $[0, A]$ pour tout $A > 0$ fixé.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$ fixé, la fonction s_n a une limite en $+\infty$. On la note G_n cette limite.
3. Montrer que la suite (G_n) converge et calculer sa limite.
4. Montrer que la suite de fonctions (s_n) converge uniformément sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On pose F la fonction limite.
5. Montrer que F a une limite en $+\infty$.
6. En supposant que l'on a $\lim_{x \to +\infty} F(x) \;=\; \lim_n G_n$, en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(1 - e^{-bt})}{t} dt.$$

7. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} F(x) \;=\; \lim_n G_n$