Feuille N°4 - Exercices Supplémentaires

1 Intégrales à paramètre

Exercice 1.1
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $K : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ continue, $M = \sup_{(x,t)\in[a,b]^2} |K(x,t)|$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| M(b-a) < 1$. L'*équation intégrale de Fredholm*, d'inconnue $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable, est :

$$(E) \quad \forall x \in [a,b], \quad \varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt + f(x)\,.$$

1. On pose $\varphi_0 = f$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\varphi_{n+1} : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b K(x,t)\,\varphi_n(t)\,dt \ .$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue sur $[a,b]$.
   (b) Montrer que la série d'applications $\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n \varphi_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ et que sa somme ψ est continue sur $[a,b]$.
   (c) Vérifier que ψ est solution de (E).
2. (a) Montrer que toute solution φ de (E) est continue.
   (b) En déduire que ψ est l'unique solution de (E).

Exercice 1.2
Pour $x \geqslant 1$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(1 + \frac{\cos t}{x}\right)\,dt.$

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer que F est C^1 sur $]1, +\infty[$.
3. Pour tout $x > 1$, calculer la dérivée $F'(x)$.
4. Montrer que $F(x) = -\displaystyle\int_x^{+\infty} F'(t)\,dt$ pour tout $x > 1$.
5. En déduire que pour tout $x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^\pi \ln(x + \cos t)\,dt = \pi \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{2}\right)$.

Exercice 1.3

1. Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}_+^*$ une application continue. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$\varphi(t) = \iint_{D_t} \sin(x^2 + y^2)\,dx\,dy \quad \text{et} \quad \psi(t) = \iint_{D_t} \cos(x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

où $D_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\,(r, \theta) \in [0, tf(\theta)] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ tels que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta\}$.

   (a) Montrer que φ et ψ sont continues.

   (b) Déterminer les limites, quand T tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,dt$ et de $\displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T \psi(t)\,dt$.

2. (a) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note $C(t) = \displaystyle\int_0^t \cos(x^2)\,dx$ et $S(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(x^2)\,dx$. Déterminer f pour que $D_1 = [0, 1]^2$, et montrer qu'alors $\varphi(t) = 2C(t)S(t)$ et $\psi(t) = C(t)^2 - S(t)^2$ pout tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

   (b) Montrer que si $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une application intégrable telle que $\lim_{t \to +\infty} g(t) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,dt = \ell$.

   (c) En déduire les valeurs des *intégrales de Fresnel*

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx\ .$$

Exercice 1.4

Soit $K : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $K(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x < y \\ y(1-x) & \text{si } x \geqslant y \end{cases}$.

1. (a) Montrer que K est continue.

   (b) Montrer que $\forall (x, y) \in [0, 1]^2,\ K(x, y) = \displaystyle\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n x)\sin(\pi n y)}{n^2}$.

2. A chaque application continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, on associe l'application $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in [0, 1]$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 K(x, y)\, f(y)\,dy$. Montrer que g est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et que $g'' = -f$, $g(0) = g(1) = 0$.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\gamma_n = \sqrt{2}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\sin(\pi n x)\,dx$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 g(x)^2\,dx = \frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\gamma_n^2}{n^4}$.

   (b) En déduire que :

$$\int_0^1 g(x)^2\,dx \le \frac{1}{\pi^4}\int_0^1 f(x)^2\,dx$$

et

$$\iint_{[0,1]^2} K(x, y)\, f(x)\, f(y)\,dx\,dy = \int_0^1 g'(x)^2\,dx \le \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f(x)^2\,dx\ .$$

4. Montrer que l'application $T : f \mapsto g$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de T.

2 Intégrales multiples

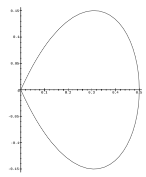
Exercice 2.1
Soit f une fonction à valeurs réelles positives et continue sur un intervalle $[\theta_1, \theta_2]$ de $\mathbb{R}$ tel que $\theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ et soit Δ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\Delta = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \ , \ 0 \leq r \leq f(\theta)\} \ .$$

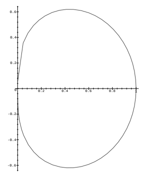
Montrer que l'aire de Δ est égale à $\frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)^{\ 2} \, d\theta$.

Applications :

1. Calculer l'aire intérieure à la boucle de strophoïde d'équation $x(x^2+y^2) - a(x^2-y^2) = 0 \ (x \geq 0)$ $(a > 0)$.



2. Calculer l'aire intérieure à la lemniscate d'équation $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \quad (x \geq 0)$



Exercice 2.2
Calculer l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 2x \ , \ 1 < x + 4y < 4\}$ en utilisant le changement de variables $\phi(x,y) = (\frac{y}{x}, x+4y)$.

Exercice 2.3

(a) Exprimer l'intégrale

$$\int_{-1}^{0} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} f(x,y,z) \, dz \, dy \, dx$$

comme une intégrale en coordonnées sphériques.

(b) Exprimer l'intégrale

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta}} \int_{0}^{r^2} g(r,\theta,z) \, dz \, dr \, d\theta$$

comme une intégrale en coordonnées cartésiennes.

Exercice 2.4
Calculer les intégrales suivants en utilisant un changement de variables convenable.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, dy \, dx.$

(a) $\displaystyle\iint_A (x^2-y^2) e^{(x-y)^2} \, dx \, dy$
où $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \ , \ 0 < x - y < 1 \ , \ 1 < xy < 2\}$.