

GEOMETRIA DIFERENCIAL – EXAME – JANEIRO DE 2001

- Data, hora e local de entrega: 5ª feira, **11/Jan. até às 14h**, no meu gabinete (cada hora ou fracção de atraso subtrai um valor).
- A **cotação** de cada alínea é 1 valor, de modo que a pontuação dos grupos é: (1) 2 val. (2) 2 val. (3) 5 val. (4) 5 val. (5) 5 val. (6) 1 val.
- As justificações são indispensáveis, mas podem e devem ser **sucintas**.
- As respostas são **individuais**, podendo apenas consultar apontamentos pessoais, livros ou artigos.
- Boa sorte!

(1) **Acções**

Considere a esfera  $S^2$  como o conjunto de vectores unitários em  $\mathbb{R}^3$ .

(a) Seja  $A(t)$  a transformação linear de  $\mathbb{R}^3$  definida pela matriz

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mostre que  $A(t)$  preserva  $S^2$  e induz uma acção de  $\mathbb{R}$  em  $S^2$ :

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \text{Diff}(S^2), \quad t \longmapsto \varphi_t = A(t)|_{S^2}.$$

Escreva o gerador infinitesimal  $w$  de  $\varphi$  em termos de coordenadas para cada uma das duas cartas no atlas estereográfico e descreva as imagens das curvas integrais de  $w$ .

(b) Para cada ponto  $p \in S^2$ , seja  $v(p)$  a projecção ortogonal do vector  $(0, 0, 1)$  em  $T_p S^2$ . Escreva fórmulas locais para  $v$  em termos de coordenadas para cada uma das duas cartas no atlas estereográfico e descreva as curvas integrais de  $v$ . Mostre que  $[v, w] = 0$ , onde  $w$  é o campo vectorial da alínea (a). Conclua que  $v$  e  $w$  definem uma acção de  $\mathbb{R}^2$  em  $S^2$ .

(2) **Teorema de Frobenius**

Sejam  $a_1(x), \dots, a_n(x)$  funções suaves em  $\mathbb{R}^n$  e sejam  $(x, z)$  coordenadas em  $\mathbb{R}^{n+1}$  com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $z \in \mathbb{R}$ .

(a) Considere a distribuição  $n$ -dimensional em  $\mathbb{R}^{n+1}$  gerada pelos campos vectoriais

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + a_i(x) \frac{\partial}{\partial z}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Determine as condições para que esta distribuição seja involutiva.

(b) Determine as condições para que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i, & i = 1, \dots, n \\ f(x_0) = z_0 \end{cases}$$

tenha solução (local)  $f$ .

**(3) Orientação**

Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $n$  e seja  $W$  o conjunto

$$\{(p, \mu) \mid p \in M, \mu \in \wedge^n T_p^* M \setminus \{0\}\}.$$

Introduza em  $W$  a seguinte relação de equivalência:

$$(p, \mu_1) \sim (p, \mu_2) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } \mu_2 = \lambda \mu_1.$$

Seja  $X$  o conjunto das classes de equivalência.

- (a) Mostre que  $X$  é uma variedade de dimensão  $n$  e mostre que a projecção de  $W$  para  $M$  que leva  $(p, \mu)$  para  $p$  dá origem a uma aplicação suave

$$\pi : X \longrightarrow M.$$

- (b) Mostre que cada ponto de  $M$  tem exactamente duas pré-imagens em  $X$  por  $\pi$ . Mostre que  $\pi$  é suave e que, se  $x \in X$  e  $p = \pi(x)$ , então  $\pi$  leva uma vizinhança de  $x$  difeomorficamente para uma vizinhança de  $p$ . Uma tal aplicação chama-se uma *cobertura dupla*.

- (c) Mostre que a aplicação de  $W$  para  $W$  que leva  $(p, \mu)$  para  $(p, -\mu)$  leva classes de equivalência para classes de equivalência e por isso induz uma aplicação

$$\sigma : X \longrightarrow X.$$

Mostre que  $\sigma$  é um difeomorfismo e que  $\pi \circ \sigma = \pi$  e  $\sigma \circ \sigma = \text{id}$ .

- (d) Suponha que  $M$  é conexa. Prove que:

$$M \text{ é orientável} \iff X \text{ não é conexa}.$$

Prove que, se  $M$  é orientável, então  $X$  tem exactamente duas componentes conexas e cada uma é levada por  $\pi$  difeomorficamente para  $M$ .

- (e) Suponha que  $M$  não é orientável. Prove que  $X$  é orientável e que  $\sigma : X \rightarrow X$  inverte a orientação.

**(4) Sequência de Mayer-Vietoris**

Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $n$ . Uma *boa cobertura* de  $M$  é uma cobertura aberta de  $M$ ,  $\{\mathcal{U}_i \mid i \in I\}$ , tal que,  $\forall i_0, \dots, i_k \in I$ , a intersecção  $\mathcal{U}_{i_0} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{i_k}$  é vazia ou difeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ .<sup>1</sup>

- (a) Diz-se que  $M$  tem *topologia finita* se admite uma boa cobertura finita,  $\{\mathcal{U}_0 \dots \mathcal{U}_N\}$ . Mostre que, se  $M$  tem topologia finita, então todos os seus grupos de co-homologia de de Rham,  $H^k(M)$ , têm dimensão finita.

**Sugestão:** Use indução no número  $N$  de elementos numa boa cobertura finita.

- (b) Seja  $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\}$  uma cobertura de  $M$  e defina  $C_1^\ell = \Omega_c^\ell(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ ,  $C_2^\ell = \Omega_c^\ell(\mathcal{U}_1) \oplus \Omega_c^\ell(\mathcal{U}_2)$  e  $C_3^\ell = \Omega_c^\ell(M)$  com aplicações

$$i : C_1^\ell \longrightarrow C_2^\ell, \quad i(\omega) = (\bar{\omega}, -\bar{\omega}) \quad \text{onde } \bar{\omega} = \begin{cases} \omega & \text{em } \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \\ 0 & \text{fora de } \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \end{cases}$$

$$j : C_2^\ell \longrightarrow C_3^\ell, \quad j(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2.$$

<sup>1</sup>Qualquer variedade  $M$  admite uma boa cobertura: pode-se produzir uma boa cobertura equipando  $M$  com uma métrica riemanniana e tomando bolas riemannianas suficientemente pequenas.

Verifique que  $i$  e  $j$  comutam com a derivada exterior (onde  $d(\omega_1, \omega_2) = (d\omega_1, d\omega_2)$ ) e que

$$0 \longrightarrow C_1^\ell \xrightarrow{i} C_2^\ell \xrightarrow{j} C_3^\ell \longrightarrow 0$$

é uma sequência exacta. Verifique sucintamente que a sequência induzida

$$\dots \rightarrow H_c^\ell(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \rightarrow H_c^\ell(\mathcal{U}_1) \oplus H_c^\ell(\mathcal{U}_2) \rightarrow H_c^\ell(M) \xrightarrow{\delta_c} H_c^{\ell+1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \rightarrow \dots$$

é exacta, descrevendo o morfismo de conexão  $\delta_c$  por analogia com a sequência de Mayer-Vietoris usual. Esta sequência chama-se a *sequência de Mayer-Vietoris com suportes compactos*. Transpondo a sequência de Mayer-Vietoris com suportes compactos obtém-se a sequência exacta dual

$$\dots \rightarrow H_c^{\ell+1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)^* \xrightarrow{\delta_c^*} H_c^\ell(M)^* \rightarrow H_c^\ell(\mathcal{U}_1)^* \oplus H_c^\ell(\mathcal{U}_2)^* \rightarrow H_c^\ell(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)^* \rightarrow \dots$$

- (c) Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vectoriais de dimensão finita. Uma aplicação bilinear  $B : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se não-degenerada se a aplicação linear induzida

$$L_B : V \longrightarrow W^* , \quad (L_B(v))(w) = B(v, w) ,$$

é bijectiva.

Seja  $M$  uma variedade orientada e conexa de dimensão  $n$ . Mostre que a aplicação

$$B : H^k(M) \times H_c^\ell(M) \longrightarrow \mathbb{R} , \quad B([\alpha], [\beta]) = \int_M \alpha \wedge \beta ,$$

onde  $k + \ell = n$ , está bem definida e é bilinear. A *aplicação de Poincaré* é a aplicação linear induzida  $P := L_B : H^k(M) \rightarrow H_c^\ell(M)^*$ . Mostre que o seguinte diagrama é comutativo a menos de sinais:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & H^{k-1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) & \xrightarrow{\delta} & H^k(M) & \rightarrow & H^k(\mathcal{U}_1) \oplus H^k(\mathcal{U}_2) & \rightarrow & H^k(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) & \dots \\ & \downarrow P & & \downarrow P & & \downarrow P & & \downarrow P & \\ \dots & H_c^{\ell+1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)^* & \xrightarrow{\delta_c^*} & H_c^\ell(M)^* & \rightarrow & H_c^\ell(\mathcal{U}_1)^* \oplus H_c^\ell(\mathcal{U}_2)^* & \rightarrow & H_c^\ell(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)^* & \dots \end{array}$$

onde a primeira linha é a sequência de Mayer-Vietoris usual e as aplicações verticais são as aplicações de Poincaré em  $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ ,  $M$ ,  $\mathcal{U}_1$  e  $\mathcal{U}_2$ .

- (d) Considere um diagrama comutativo a menos de sinais do tipo

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \star & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

onde os  $A_i$ 's e os  $B_i$ 's são espaços vectoriais de dimensão finita e todas as aplicações são lineares. Suponha que as duas linhas horizontais são sequências exactas. Mostre que, se as duas aplicações verticais à esquerda de  $\star$  e as duas aplicações verticais à direita de  $\star$  são bijectivas, então a aplicação  $\star$  é bijectiva.

- (e) Diz-se que  $M$  satisfaz a *dualidade de Poincaré* se, para cada  $k$  e  $\ell$  com  $k + \ell = n$ , a aplicação bilinear  $B : H^k(M) \times H_c^\ell(M) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por integração é não-degenerada. Mostre que qualquer variedade orientada com topologia finita satisfaz a dualidade de Poincaré. Conclua que, se  $M$  é compacta, então

$$\dim H^k(M) = \dim H^{n-k}(M) , \quad k = 0, 1, \dots, n .$$

**(5) Geometria riemanniana em grupos de Lie**

Seja  $G$  um grupo de Lie de dimensão  $n$ . As translações à esquerda e à direita por  $g \in G$  são os difeomorfismos  $L_g : G \rightarrow G$ ,  $L_g(h) = g \cdot h$ , e  $R_g : G \rightarrow G$ ,  $R_g(h) = h \cdot g$ . Um campo vectorial  $X$  em  $G$  é *invariante à esquerda* quando  $X_{g \cdot h} = (dL_g)_h(X_h)$ ,  $\forall g, h \in G$ . A álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é o espaço vectorial de todos os campos vectoriais em  $G$  invariantes à esquerda, equipado com o parêntesis de Lie  $[\cdot, \cdot]$  de campos vectoriais.

(a) Seja  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  uma métrica riemanniana em  $G$  invariante à esquerda, ou seja,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_g = \langle (dL_{hg^{-1}})_g \cdot, (dL_{hg^{-1}})_g \cdot \rangle_h, \quad \forall g, h \in G;$$

obtém-se uma tal métrica escolhendo um produto interno positivo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$  no espaço tangente na identidade,  $T_e G$ , e trasladando-o:  $\langle \cdot, \cdot \rangle_g := \langle (dL_{g^{-1}})_g \cdot, (dL_{g^{-1}})_g \cdot \rangle_e$ . Considere a correspondente conexão de Levi-Civita  $\nabla : \Gamma(TG) \rightarrow \Gamma(T^*G \otimes TG)$ . Mostre que, se  $X, Y, Z$  são invariantes à esquerda, então

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} (\langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle).$$

(b) Uma métrica riemanniana em  $G$  é *bi-invariante* se for invariante à esquerda e à direita. Mostre que qualquer grupo de Lie compacto admite uma métrica bi-invariante.

(c) Conjugação por  $g \in G$  é o difeomorfismo  $L_g \circ R_{g^{-1}} : G \rightarrow G$ ,  $h \mapsto ghg^{-1}$ . A *acção adjunta* de  $g$  na álgebra de Lie é a aplicação linear  $\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  induzida pela derivada da conjugação por  $g$ :  $(\text{Ad}_g X)_e = d(L_g \circ R_{g^{-1}})_e(X_e)$ . Mostre que uma métrica em  $G$  invariante à esquerda também é invariante à direita se e só se cada  $\text{Ad}_g$  é uma isometria, ou seja,

$$\langle \text{Ad}_g \cdot, \text{Ad}_g \cdot \rangle_e = \langle \cdot, \cdot \rangle_e, \quad \forall g \in G.$$

(d) A *representação adjunta* de  $\mathfrak{g}$  em si própria,  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ , é induzida pela derivada na identidade da acção adjunta  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ ,  $g \mapsto \text{Ad}_g$ , onde  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  é o conjunto de todas as transformações lineares de  $\mathfrak{g}$  e onde  $\text{GL}(\mathfrak{g})$  é o conjunto das transformações lineares invertíveis de  $\mathfrak{g}$ . Mostre que, para um grupo de Lie conexo, uma métrica invariante à esquerda também é invariante à direita se e só se cada  $\text{ad}_X$  é uma transformação anti-simétrica, ou seja,

$$\langle \text{ad}_X \cdot, \cdot \rangle_e + \langle \cdot, \text{ad}_X \cdot \rangle_e = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

**Sugestão:** Um grupo de Lie conexo é gerado por uma vizinhança da identidade. Para  $g$  suficientemente próximo de  $e$ ,  $g$  é da forma  $g = \exp X$  para algum  $X \in \mathfrak{g}$  perto de 0 (onde a exponencial é dada pelo valor no instante 1 da curva integral de  $X$  que começa em  $e$ ). Pode usar a identidade  $\text{Ad}_{\exp X} = e^{\text{ad}_X}$  sem a demonstrar.

(e) Pela alínea (d), pode-se redefinir métrica bi-invariante como sendo uma métrica para a qual cada  $\text{ad}_X$  é anti-simétrica. Mostre que, se  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é bi-invariante e  $X, Y, Z$  são campos vectoriais invariantes à esquerda, então a conexão de Levi-Civita satisfaz

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y],$$

e o seu tensor de curvatura é simplesmente

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4} [Z, [X, Y]].$$

**Sugestão:** Use, sem demonstrar, a igualdade  $\text{ad}_X = [X, \cdot]$ .

**(6) Superfícies de Riemann**

Descreva (não necessariamente em coordenadas) uma função suave no toro  $T^2$  com exactamente três pontos singulares.