Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA DIFERENCIAL – EXAME – JANEIRO DE 2001

- Data, hora e local de entrega: 5ª feira, **11/Jan. até às 14h**, no meu gabinete (cada hora ou fracção de atraso subtrai um valor).
- A **cotação** de cada alínea é 1 valor, de modo que a pontuação dos grupos é: (1) 2 val. (2) 2 val. (3) 5 val. (4) 5 val. (5) 5 val. (6) 1 val.
- As justificações são indispensáveis, mas podem e devem ser **sucintas**.
- As respostas são **individuais**, podendo apenas consultar apontamentos pessoais, livros ou artigos.
- Boa sorte!

(1) **Acções**
Considere a esfera S^2 como o conjunto de vectores unitários em $\mathbb{R}^3$.

(a) Seja $A(t)$ a transformação linear de $\mathbb{R}^3$ definida pela matriz

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

Mostre que $A(t)$ preserva S^2 e induz uma acção de $\mathbb{R}$ em S^2:

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Diff}(S^2) \ , \qquad t \longmapsto \varphi_t = A(t)|_{S^2} \ .$$

Escreva o gerador infinitesimal w de φ em termos de coordenadas para cada uma das duas cartas no atlas estereográfico e descreva as imagens das curvas integrais de w.

(b) Para cada ponto $p \in S^2$, seja $v(p)$ a projecção ortogonal do vector $(0,0,1)$ em T_pS^2. Escreva fórmulas locais para v em termos de coordenadas para cada uma das duas cartas no atlas estereográfico e descreva as curvas integrais de v. Mostre que $[v,w] = 0$, onde w é o campo vectorial da alínea (a). Conclua que v e w definem uma acção de $\mathbb{R}^2$ em S^2.

(2) **Teorema de Frobenius**
Sejam $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ funções suaves em $\mathbb{R}^n$ e sejam (x, z) coordenadas em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $x \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}$.

(a) Considere a distribuição n-dimensional em $\mathbb{R}^{n+1}$ gerada pelos campos vectoriais

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + a_i(x) \frac{\partial}{\partial z} \ , \qquad i = 1, \ldots, n \ .$$

Determine as condições para que esta distribuição seja involutiva.

(b) Determine as condições para que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i \ , & i = 1, \ldots, n \\ f(x_0) = z_0 \end{cases}$$

tenha solução (local) f.

(3) **Orientação**
Seja M uma variedade de dimensão n e seja W o conjunto
$$\{(p,\mu) \mid p \in M \ , \ \mu \in \wedge^n T_p^* M \setminus \{0\}\} \ .$$
Introduza em W a seguinte relação de equivalência:
$$(p,\mu_1) \sim (p,\mu_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } \mu_2 = \lambda \mu_1 \ .$$
Seja X o conjunto das classes de equivalência.

(a) Mostre que X é uma variedade de dimensão n e mostre que a projecção de W para M que leva (p,μ) para p dá origem a uma aplicação suave
$$\pi : X \longrightarrow M \ .$$

(b) Mostre que cada ponto de M tem exactamente duas pré-imagens em X por π. Mostre que π é suave e que, se $x \in X$ e $p = \pi(x)$, então π leva uma vizinhança de x difeomorficamente para uma vizinhança de p. Uma tal aplicação chama-se uma *cobertura dupla*.

(c) Mostre que a aplicação de W para W que leva (p,μ) para $(p,-\mu)$ leva classes de equivalência para classes de equivalência e por isso induz uma aplicação
$$\sigma : X \longrightarrow X \ .$$
Mostre que σ é um difeomorfismo e que $\pi \circ \sigma = \pi$ e $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$.

(d) Suponha que M é conexa. Prove que:
$$M \text{ é orientável} \quad \Longleftrightarrow \quad X \textit{ não } \text{é conexa} \ .$$
Prove que, se M é orientável, então X tem exactamente duas componentes conexas e cada uma é levada por π difeomorficamente para M.

(e) Suponha que M não é orientável. Prove que X *é* orientável e que $\sigma : X \to X$ inverte a orientação.

(4) **Sequência de Mayer-Vietoris**
Seja M uma variedade de dimensão n. Uma *boa cobertura* de M é uma cobertura aberta de M, $\{\mathcal{U}_i \mid i \in I\}$, tal que, $\forall i_0, \dots, i_k \in I$, a intersecção $\mathcal{U}_{i_0} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{i_k}$ é vazia ou difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.[1]

(a) Diz-se que M tem *topologia finita* se admite uma boa cobertura finita, $\{\mathcal{U}_0 \dots \mathcal{U}_N\}$. Mostre que, se M tem topologia finita, então todos os seus grupos de co-homologia de de Rham, $H^k(M)$, têm dimensão finita.

Sugestão: Use indução no número N de elementos numa boa cobertura finita.

(b) Seja $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2\}$ uma cobertura de M e defina $C_1^\ell = \Omega_c^\ell(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$, $C_2^\ell = \Omega_c^\ell(\mathcal{U}_1) \oplus \Omega_c^\ell(\mathcal{U}_2)$ e $C_3^\ell = \Omega_c^\ell(M)$ com aplicações
$$i : C_1^\ell \longrightarrow C_2^\ell \ , \quad i(\omega) = (\overline{\omega}, -\overline{\omega}) \qquad \text{onde } \overline{\omega} = \begin{cases} \omega \text{ em } \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \\ 0 \text{ fora de } \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \end{cases}$$
$$j : C_2^\ell \longrightarrow C_3^\ell \ , \quad j(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 \ .$$

[1] Qualquer variedade M admite uma boa cobertura: pode-se produzir uma boa cobertura equipando M com uma métrica riemanniana e tomando bolas riemannianas suficientemente pequenas.

Verifique que i e j comutam com a derivada exterior (onde $d(\omega_1, \omega_2) = (d\omega_1, d\omega_2)$) e que

$$0 \longrightarrow C_1^\ell \xrightarrow{i} C_2^\ell \xrightarrow{j} C_3^\ell \longrightarrow 0$$

é uma sequência exacta. Verifique sucintamente que a sequência induzida

$$\ldots \to H_c^\ell(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \to H_c^\ell(\mathcal{U}_1) \oplus H_c^\ell(\mathcal{U}_2) \to H_c^\ell(M) \overset{\delta_c}{\to} H_c^{\ell+1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \to \ldots$$

é exacta, descrevendo o morfismo de conexão δ_c por analogia com a sequência de Mayer-Vietoris usual. Esta sequência chama-se a *sequência de Mayer-Vietoris com suportes compactos*. Transpondo a sequência de Mayer-Vietoris com suportes compactos obtém-se a sequência exacta dual

$$\ldots \to H_c^{\ell+1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)^* \overset{\delta_c^*}{\to} H_c^\ell(M)^* \to H_c^\ell(\mathcal{U}_1)^* \oplus H_c^\ell(\mathcal{U}_2)^* \to H_c^\ell(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)^* \to \ldots$$

(c) Sejam V e W dois espaços vectoriais de dimensão finita. Uma aplicação bilinear $B : V \times W \to \mathbb{R}$ diz-se não-degenerada se a aplicação linear induzida

$$L_B : V \longrightarrow W^* , \qquad (L_B(v))(w) = B(v, w) ,$$

é bijectiva.

Seja M uma variedade orientada e conexa de dimensão n. Mostre que a aplicação

$$B : H^k(M) \times H_c^\ell(M) \longrightarrow \mathbb{R} , \qquad B([\alpha], [\beta]) = \int_M \alpha \wedge \beta ,$$

onde $k + \ell = n$, está bem definida e é bilinear. A *aplicação de Poincaré* é a aplicação linear induzida $P := L_B : H^k(M) \to H_c^\ell(M)^*$. Mostre que o seguinte diagrama é comutativo a menos de sinais:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & H^{k-1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) & \overset{\delta}{\to} & H^k(M) & \to & H^k(\mathcal{U}_1) \oplus H^k(\mathcal{U}_2) & \to & H^k(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) & \ldots \\
 & \downarrow P & & \downarrow P & & \downarrow P & & \downarrow P & \\
\ldots & H_c^{\ell+1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)^* & \overset{\delta_c^*}{\to} & H_c^\ell(M)^* & \to & H_c^\ell(\mathcal{U}_1)^* \oplus H_c^\ell(\mathcal{U}_2)^* & \to & H_c^\ell(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)^* & \ldots
\end{array}$$

onde a primeira linha é a sequência de Mayer-Vietoris usual e as aplicações verticais são as aplicações de Poincaré em $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, M, $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$.

(d) Considere um diagrama comutativo a menos de sinais do tipo

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \star & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

onde os A_i's e os B_i's são espaços vectoriais de dimensão finita e todas as aplicações são lineares. Suponha que as duas linhas horizontais são sequências exactas. Mostre que, se as duas aplicações verticais à esquerda de $\star$ e as duas aplicações verticais à direita de $\star$ são bijectivas, então a aplicação $\star$ é bijectiva.

(e) Diz-se que M satisfaz a *dualidade de Poincaré* se, para cada k e ℓ com $k + \ell = n$, a aplicação bilinear $B : H^k(M) \times H_c^\ell(M) \to \mathbb{R}$ dada por integração é não-degenerada. Mostre que qualquer variedade orientada com topologia finita satisfaz a dualidade de Poincaré. Conclua que, se M é compacta, então

$$\dim H^k(M) = \dim H^{n-k}(M) , \qquad k = 0, 1, \ldots n .$$

(5) **Geometria riemanniana em grupos de Lie**
Seja G um grupo de Lie de dimensão n. As translações à esquerda e à direita por $g \in G$ são os difeomorfismos $L_g : G \to G$, $L_g(h) = g \cdot h$, e $R_g : G \to G$, $R_g(h) = h \cdot g$. Um campo vectorial X em G é *invariante à esquerda* quando $X_{g \cdot h} = (dL_g)_h(X_h), \forall g, h \in G$. A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é o espaço vectorial de todos os campos vectoriais em G invariantes à esquerda, equipado com o parêntesis de Lie $[\cdot, \cdot]$ de campos vectoriais.

(a) Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica riemanniana em G invariante à esquerda, ou seja,
$$\langle \cdot, \cdot \rangle_g = \langle (dL_{hg^{-1}})_g \cdot, (dL_{hg^{-1}})_g \cdot \rangle_h \ , \qquad \forall g, h \in G \ ;$$
obtém-se uma tal métrica escolhendo um produto interno positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ no espaço tangente na identidade, T_eG, e transladando-o: $\langle \cdot, \cdot \rangle_g := \langle (dL_{g^{-1}})_g \cdot, (dL_{g^{-1}})_g \cdot \rangle_e$. Considere a correspondente conexão de Levi-Civita $\nabla : \Gamma(TG) \to \Gamma(T^*G \otimes TG)$. Mostre que, se X, Y, Z são invariantes à esquerda, então
$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \tfrac{1}{2} \left(\langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \right) \ .$$

(b) Uma métrica riemanniana em G é *bi-invariante* se for invariante à esquerda e à direita. Mostre que qualquer grupo de Lie compacto admite uma métrica bi-invariante.

(c) Conjugação por $g \in G$ é o difeomorfismo $L_g \circ R_{g^{-1}} : G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$. A *acção adjunta* de g na álgebra de Lie é a aplicação linear $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ induzida pela derivada da conjugação por g: $(\mathrm{Ad}_g X)_e = d(L_g \circ R_{g^{-1}})_e(X_e)$. Mostre que uma métrica em G invariante à esquerda também é invariante à direita se e só se cada Ad_g é uma isometria, ou seja,
$$\langle \mathrm{Ad}_g \cdot, \mathrm{Ad}_g \cdot \rangle_e = \langle \cdot, \cdot \rangle_e \ , \qquad \forall g \in G \ .$$

(d) A *representação adjunta* de $\mathfrak{g}$ em si própria, $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, é induzida pela derivada na identidade da acção adjunta $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), g \mapsto \mathrm{Ad}_g$, onde $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é o conjunto de todas as transformações lineares de $\mathfrak{g}$ e onde $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ é o conjunto das transformações lineares invertíveis de $\mathfrak{g}$. Mostre que, para um grupo de Lie conexo, uma métrica invariante à esquerda também é invariante à direita se e só se cada ad_X é uma transformação anti-simétrica, ou seja,
$$\langle \mathrm{ad}_X \cdot, \cdot \rangle_e + \langle \cdot, \mathrm{ad}_X \cdot \rangle_e = 0 \ , \qquad \forall X \in \mathfrak{g} \ .$$

Sugestão: Um grupo de Lie conexo é gerado por uma vizinhança da identidade. Para g suficientemente próximo de e, g é da forma $g = \exp X$ para algum $X \in \mathfrak{g}$ perto de 0 (onde a exponencial é dada pelo valor no instante 1 da curva integral de X que começa em e). Pode usar a identidade $\mathrm{Ad}_{\exp X} = e^{\mathrm{ad}_X}$ sem a demonstrar.

(e) Pela alínea (d), pode-se redefinir métrica bi-invariante como sendo uma métrica para a qual cada ad_X é anti-simétrica. Mostre que, se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é bi-invariante e X, Y, Z são campos vectoriais invariantes à esquerda, então a conexão de Levi-Civita satisfaz
$$\nabla_X Y = \tfrac{1}{2}[X, Y] \ ,$$
e o seu tensor de curvatura é simplesmente
$$R(X, Y)Z = \tfrac{1}{4}[Z, [X, Y]] \ .$$

Sugestão: Use, sem demonstrar, a igualdade $\mathrm{ad}_X = [X, \cdot]$.

(6) **Superfícies de Riemann**
Descreva (não necessariamente em coordenadas) uma função suave no toro T^2 com exactamente três pontos singulares.