

GEOMETRIA DIFERENCIAL – EXAME – JANEIRO DE 2000

- Data, hora e local de entrega: 2ª feira, 17/Jan. até às 14h, no meu gabinete (A.C.), cada hora ou fracção de atraso subtrai um valor.
- A cotação de cada alínea é 1 valor, de modo que a pontuação dos grupos é: (1) 2 val. (2) 3 val. (3) 5 val. (4) 5 val. (5) 3 val. (6) 2 val.
- As justificações são indispensáveis, mas podem e devem ser sucintas.
- As respostas são individuais, podendo apenas consultar apontamentos pessoais, livros ou artigos.
- Boa sorte!

(1) **Hessiana**

Seja M uma variedade de dimensão n e $f \in C^\infty(M)$ uma função com um ponto crítico em $p \in M$.

- a) Dados vectores $X, Y \in T_pM$, sejam \tilde{X} e \tilde{Y} campos vectoriais numa vizinhança de p que estendem X e Y . Mostre que a aplicação

$$H : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) \longmapsto \left(L_{\tilde{X}}(L_{\tilde{Y}}f) \right) (p)$$

está bem definida (ou seja, é independente da escolha das extensões de X e Y), é bilinear e é simétrica. A aplicação H chama-se a *hessiana* de f em p .

- b) Seja (U, x_1, \dots, x_n) uma carta de coordenadas para M centradas em p . Mostre que na base de T_pM induzida por estas coordenadas a matriz que representa H é a matriz das derivadas parciais de segunda ordem

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right).$$

(2) **Teorema de Frobenius**

Seja M uma variedade de dimensão n .

- a) Mostre que, se ω é uma forma-1 em M e X, Y são campos vectoriais em M , então

$$d\omega(X, Y) = L_X \iota(Y)\omega - L_Y \iota(X)\omega - \omega([X, Y]).$$

- b) Dada uma distribuição \mathcal{D} de rank k em M , seja \mathcal{D}° o conjunto de todas as formas ω com a propriedade

$$\omega(X_1, \dots, X_\ell) = 0, \quad \forall X_1, \dots, X_\ell \in \mathcal{D},$$

quando ω é de grau ℓ . Mostre que \mathcal{D}° é um ideal de $\Omega(M)$, i.e., mostre que, para quaisquer ω e ω' em \mathcal{D}° e para qualquer forma $\alpha \in \Omega(M)$, se tem

$$\omega + \omega' \in \mathcal{D}^\circ \quad \text{e} \quad \omega \wedge \alpha \in \mathcal{D}^\circ.$$

Mostre ainda que localmente \mathcal{D}° é gerado por formas-1 independentes $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}$.

- c) Mostre que a distribuição \mathcal{D} é integrável se e só se \mathcal{D}° é fechado para a derivada exterior, ou seja, $d\omega \in \mathcal{D}^\circ, \forall \omega \in \mathcal{D}^\circ$.

(3) **Cohomologia de de Rham e teorema de Stokes**

Sejam M e N duas variedades compactas conexas orientadas e de dimensão n . Para tais variedades a aplicação linear dada por integração, $I_M : H^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$, é um isomorfismo. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave, induzindo por pullback uma aplicação linear $f^\# : H^n(N) \rightarrow H^n(M)$. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^n(N) & \xrightarrow{f^\#} & H^n(M) \\ I_N \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow I_M \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{mult. por } c} & \mathbb{R} \end{array}$$

onde $c \in \mathbb{R}$, chamado o *grau* de f , é o factor de multiplicação que caracteriza a aplicação linear induzida na linha de baixo. Mais explicitamente, $\text{grau}(f)$ é o único número real que verifica

$$\int_M f^* \omega = (\text{grau}(f)) \int_N \omega, \quad \forall \omega \in \Omega^n(N).$$

- a) Mostre que, se f é um difeomorfismo que preserva a orientação, então $\text{grau}(f) = +1$. De modo análogo, qualquer difeomorfismo que inverte a orientação tem $\text{grau}(f) = -1$. Mostre que, se f não é sobrejectiva, então $\text{grau}(f) = 0$. Consequentemente, se $\text{grau}(f) \neq 0$, então a equação $f(p) = q$ tem soluções para todo o $q \in M$.
- b) Mostre que, se q é um valor regular de f , então a imagem inversa $f^{-1}(q)$ é um conjunto finito. Seja q um valor regular de f com imagem inversa $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$. (A existência de valores regulares é garantida pelo teorema de Sard.) Mostre que cada $df_{p_i} : T_{p_i}M \rightarrow T_qN$ é um isomorfismo.
- c) Define-se

$$\sigma_i = \begin{cases} +1 & \text{se } df_{p_i} \text{ preserva a orientação} \\ -1 & \text{se } df_{p_i} \text{ inverte a orientação} \end{cases}$$

onde p_1, \dots, p_k são as pré-imagens de um valor regular q . Mostre que

$$\text{grau}(f) = \sum_{i=1}^k \sigma_i.$$

Conclua que o grau de f é sempre um inteiro e que o número de soluções da equação $f(p) = q$, contado apropriadamente com sinais, não depende da escolha de q , e só depende da classe de homotopia de f .

- d) Seja W uma variedade orientada de dimensão $n+1$ com um domínio regular compacto $D \subset W$ tal que M é a fronteira de D , ou seja, tal que $i(M) = \partial D$ onde $i : M \hookrightarrow W$ é uma inclusão. Mostre que, se se puder estender f a uma aplicação suave $F : D \rightarrow N$ (i.e., $F \circ i = f$), então $\text{grau}(f) = 0$.
- e) Demonstre o teorema do ponto fixo de Brouwer:
- Seja B^n a bola fechada de raio 1 em \mathbb{R}^n e seja $\varphi : B^n \rightarrow B^n$ uma aplicação suave. Mostre, utilizando as alíneas anteriores, que φ tem um ponto fixo (pelo menos).

Sugestão: Mostre que, se φ não tivesse pontos fixos, poder-se-ia definir uma aplicação suave $F : B^n \rightarrow S^{n-1}$ que estende a aplicação identidade $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$.

(4) **Fibrados Complexos**

Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ a projecção para o espaço projectivo complexo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ que a cada vector (z_0, \dots, z_n) faz corresponder a linha complexa $[z_0, \dots, z_n]$ por ele gerada.

O fibrado de hiperplanos de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ é o fibrado de linhas complexas sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

$$H = \{(p, h) \mid p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n, h \text{ é função } \mathbb{C}\text{-linear na linha } p \subseteq \mathbb{C}^{n+1}\}$$

com projecção $(p, h) \mapsto p$.

a) Sejam $\frac{\partial}{\partial z_j}, j = 0, 1, \dots, n$, os campos vectoriais definidos pelas coordenadas de \mathbb{C}^{n+1} .

Mostre que, para cada função \mathbb{C} -linear $h : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$, os campos vectoriais X em \mathbb{C}^{n+1} definidos por $X_z = h(z) \frac{\partial}{\partial z_j}$ descem para $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, i.e. mostre que $d\pi_z(X_z) = d\pi_{\lambda z}(X_{\lambda z})$ para quaisquer $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Denota-se por $\pi_* X$ o campo assim induzido em $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Sugestão: Em \mathcal{U}_0 tem-se coordenadas $Z_1 = \frac{z_1}{z_0}, \dots, Z_n = \frac{z_n}{z_0}$. Verifique que

$$\pi^* dZ_j = \frac{z_0 dz_j - z_j dz_0}{z_0^2}$$

e use estas expressões para mostrar que as imagens por π dos campos vectoriais $\frac{\partial}{\partial z_j}$ são

$$d\pi_z \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right) = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{\partial}{\partial Z_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{e} \quad d\pi_z \left(\frac{\partial}{\partial z_0} \right) = - \sum_{j=1}^n \frac{z_j}{z_0^2} \cdot \frac{\partial}{\partial Z_j}.$$

b) Mostre que o espaço tangente a $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ em $[z_0, \dots, z_n]$ com $z_0 \neq 0$ é gerado pelos vectores $d\pi_z \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right), j = 0, \dots, n$, onde $z = (z_0, \dots, z_n)$.

Mostre que a única relação entre estes vectores é $\sum z_j d\pi_z \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right) = 0$.

c) Define-se um morfismo de fibrados

$$H^{\oplus(n+1)} := \underbrace{H \oplus \dots \oplus H}_{n+1} \xrightarrow{\phi} T\mathbb{C}\mathbb{P}^n$$

pela fórmula $\phi(h_0, \dots, h_n) = d\pi_z(\sum h_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j})$, onde (h_0, \dots, h_n) está na fibra de $H^{\oplus(n+1)}$ sobre $p = [z]$; cada h_j é uma função \mathbb{C} -linear na linha $p \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ que se estende a $\mathbb{C}^{n+1} = p \oplus p^\perp$ como sendo zero no complemento hermitico p^\perp . Mostre que ϕ é sobrejectiva.

d) Mostre que o núcleo de ϕ é o subfibrado trivial de linhas complexas gerado pela secção (z_0, \dots, z_n) ; aqui z_j representa a secção de H dada pela j -ésima função coordenada.

e) Mostre que $H^{\oplus(n+1)} \simeq T\mathbb{C}\mathbb{P}^n \oplus \mathbb{C}$, onde \mathbb{C} representa o fibrado trivial de linhas complexas sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

(5) Geodésicas e subvariedades

Seja (M, g) uma variedade riemanniana e seja X uma subvariedade compacta de M com inclusão $i : X \hookrightarrow M$. O *espaço normal* a X em $x \in X$ é o espaço quociente

$$N_x X = T_x M / T_x X ,$$

e o *fibrado normal* a X em M é o fibrado vectorial NX cuja fibra sobre $x \in X$ é $N_x X$. Seja $i^* TM$ a restrição a X do fibrado tangente de M . O fibrado normal a X pode ser identificado via g com o subfibrado de $i^* TM$ formado pelos complementos ortogonais aos espaços tangentes a X ; concretamente

$$N_x X \simeq \{v \in T_x M \mid g_x(v, w) = 0, \forall w \in T_x X\} .$$

Demonstre o teorema da vizinhança tubular na seguinte forma:

- Dado $\varepsilon > 0$ seja \mathcal{U}_ε o conjunto dos pontos de M que estão a uma distância riemanniana de X menor do que ε . Mostre que, para ε suficientemente pequeno, cada $p \in \mathcal{U}_\varepsilon$ tem um único ponto mais próximo $\pi(p) \in X$.
- Seja $\pi : \mathcal{U}_\varepsilon \rightarrow X$ a aplicação definida na alínea anterior para ε suficientemente pequeno. Mostre que, para $p \in \mathcal{U}_\varepsilon$, a geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ de $x := \pi(p)$ até p não sai de \mathcal{U}_ε .
- Seja $NX_\varepsilon = \{(x, v) \in NX : \|v\| < \varepsilon\}$. Seja $\exp : NX_\varepsilon \rightarrow M$ a aplicação exponencial dada pelas geodésicas e seja $\nu : NX_\varepsilon \rightarrow X$, $\nu(x, v) = x$. Mostre que, para ε suficientemente pequeno, \exp leva NX_ε difeomorficamente para \mathcal{U}_ε e mostre que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 NX_\varepsilon & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{U}_\varepsilon \\
 \searrow \nu & & \swarrow \pi \\
 & X &
 \end{array}$$

(6) Superfícies de Riemann

- Calcule o integral sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ da classe de Chern $c_1(T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$.
- Esboce na superfície de Riemann de género 2 um campo vectorial com uma só singularidade. Prove que não pode haver um difeomorfismo entre o toro T^2 e a superfície de Riemann de género 2.