

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 1

(para 2ª feira, 2 de Outubro)

Grassmannianas Reais

- (1) Para $0 < k < n$, seja L o conjunto de todas as aplicações lineares injectivas de \mathbb{R}^k para \mathbb{R}^n . Mostre que L é uma variedade de dimensão kn .

Sugestão: L é um subconjunto aberto de um espaço vectorial de dimensão kn .

- (2) Considere o conjunto E de todos os pares $(l_1, l_2) \in L \times L$ com Imagem $l_1 =$ Imagem l_2 . Mostre que E é uma relação de equivalência. O que são as classes de equivalência?

Seja $\mathbb{G}_k(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das classes de equivalência. O objectivo dos problemas seguintes é mostrar que $\mathbb{G}_k(\mathbb{R}^n)$ é uma variedade de dimensão $k(n-k)$; $\mathbb{G}_k(\mathbb{R}^n)$ chama-se a **grassmanniana real de subespaços k -dimensionais de \mathbb{R}^n** .

- (3) Seja M o conjunto das matrizes reais $n \times k$ de característica k . Identifique M com L . Mostre que as seguintes duas condições em $m_1, m_2 \in M$ são equivalentes:

- (a) m_1 é E -equivalente a m_2 ,
(b) existe uma matriz $k \times k$ invertível b tal que $m_1 = m_2 b$.

- (4) Seja $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ um k -vector de inteiros com $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Dada uma matriz $m \in M$, designa-se por m_I o menor $k \times k$ de m cujas linhas são a i_1 -ésima, i_2 -ésima, \dots , i_k -ésima linhas de m . Seja $M_I = \{m \in M \mid m_I \text{ é invertível}\}$. Prove que:

- (a) M_I é um subconjunto aberto de M ,
(b) $M = \cup M_I$, e
(c) se $m \in M_I$, então qualquer matriz que é E -equivalente a m está em M_I .

- (5) Prove que, se $m \in M_I$, então existe uma única matriz $m^\# \in M_I$ que é E -equivalente a m e que tem a propriedade de $m_I^\#$ ser a matriz identidade.

- (6) Dada $m \in M$, seja $[m]$ a sua classe de equivalência em $\mathbb{G}_k(\mathbb{R}^n)$. Defina

$$\mathcal{U}_I = \{[m] \in \mathbb{G}_k(\mathbb{R}^n) \mid m \in M_I\},$$

e defina uma aplicação bijectiva $\varphi_I : \mathcal{U}_I \rightarrow \mathbb{R}^{k(n-k)}$ do seguinte modo. Seja

$$\mathcal{V}_I = \{m \in M \mid m_I \text{ é a matriz identidade } k \times k\}.$$

Usando o exercício 5, mostre que a aplicação

$$\mathcal{V}_I \longrightarrow \mathcal{U}_I, \quad m \longmapsto [m] \quad (\star)$$

é bijectiva. Mostre que existe uma identificação (muito natural)

$$\mathcal{V}_I \simeq \mathbb{R}^{k(n-k)} \quad (\star\star)$$

e componha $(\star\star)$ com a inversa de (\star) .

- (7) Seja \mathcal{A} a colecção de cartas $(\mathcal{U}_I, \mathbb{R}^{k(n-k)}, \varphi_I)$. Verifique que \mathcal{A} é um atlas calculando as funções de transição associadas a cada par de cartas nesta colecção e verificando que são suaves.