Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 1

(para 2ª feira, 2 de Outubro)

Grassmannianas Reais

(1) Para $0 < k < n$, seja L o conjunto de todas as aplicações lineares injectivas de $\mathbb{R}^k$ para $\mathbb{R}^n$. Mostre que L é uma variedade de dimensão kn.

Sugestão: L é um subconjunto aberto de um espaço vectorial de dimensão kn.

(2) Considere o conjunto E de todos os pares $(l_1, l_2) \in L \times L$ com Imagem l_1 = Imagem l_2. Mostre que E é uma relação de equivalência. O que são as classes de equivalência?

Seja $\mathbb{G}_k(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das classes de equivalência. O objectivo dos problemas seguintes é mostrar que $\mathbb{G}_k(\mathbb{R}^n)$ é uma variedade de dimensão $k(n-k)$; $\mathbb{G}_k(\mathbb{R}^n)$ chama-se a **grassmanniana real de subespaços k-dimensionais de $\mathbb{R}^n$**.

(3) Seja M o conjunto das matrizes reais $n \times k$ de característica k. Identifique M com L. Mostre que as seguintes duas condições em $m_1, m_2 \in M$ são equivalentes:
(a) m_1 é E-equivalente a m_2,
(b) existe uma matriz $k \times k$ invertível b tal que $m_1 = m_2 b$.

(4) Seja $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ um k-vector de inteiros com $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$. Dada uma matriz $m \in M$, designa-se por m_I o menor $k \times k$ de m cujas linhas são a i_1-ésima, i_2-ésima, ..., i_k-ésima linhas de m. Seja $M_I = \{m \in M \mid m_I \text{ é invertível } \}$. Prove que:
(a) M_I é um subconjunto aberto de M,
(b) $M = \cup M_I$, e
(c) se $m \in M_I$, então qualquer matriz que é E-equivalente a m está em M_I.

(5) Prove que, se $m \in M_I$, então existe uma única matriz $m^{\#} \in M_I$ que é E-equivalente a m e que tem a propriedade de $m_I^{\#}$ ser a matriz identidade.

(6) Dada $m \in M$, seja $[m]$ a sua classe de equivalência em $\mathbb{G}_k(\mathbb{R}^n)$. Defina

$$\mathcal{U}_I = \{[m] \in \mathbb{G}_k(\mathbb{R}^n) \mid m \in M_I\} ,$$

e defina uma aplicação bijectiva $\varphi_I : \mathcal{U}_I \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ do seguinte modo. Seja

$$\mathcal{V}_I = \{m \in M \mid m_I \text{ é a matriz identidade } k \times k\} .$$

Usando o exercício 5, mostre que a aplicação

$$\mathcal{V}_I \longrightarrow \mathcal{U}_I , \quad m \longmapsto [m] \qquad (\star)$$

é bijectiva. Mostre que existe uma identificação (muito natural)

$$\mathcal{V}_I \simeq \mathbb{R}^{k(n-k)} \qquad (\star\star)$$

e componha $(\star\star)$ com a inversa de $(\star)$.

(7) Seja $\mathcal{A}$ a colecção de cartas $(\mathcal{U}_I, \mathbb{R}^{k(n-k)}, \varphi_I)$. Verifique que $\mathcal{A}$ é um atlas calculando as funções de transição associadas a cada par de cartas nesta colecção e verificando que são suaves.