Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 10

(para 2ª feira, 11 de Dezembro)

Grau de uma Aplicação

Sejam M e N duas variedades compactas conexas orientadas e de dimensão n. Para tais variedades a aplicação linear dada por integração, $I_M : H^n(M) \to \mathbb{R}$, é um isomorfismo.
Seja $f : M \to N$ uma aplicação suave, induzindo por pullback uma aplicação linear $f^\sharp : H^n(N) \to H^n(M)$. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^n(N) & \xrightarrow{f^\sharp} & H^n(M) \\ I_N \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow I_M \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{mult. por } c} & \mathbb{R} \end{array}$$

onde $c \in \mathbb{R}$, chamado o **grau** de f, é o factor de multiplicação que caracteriza a aplicação linear induzida na linha de baixo. Mais explicitamente, grau(f) é o único número real que verifica

$$\int_M f^*\omega = (\text{grau}(f)) \int_N \omega \ , \qquad \forall \omega \in \Omega^n(N) \ .$$

(1) Mostre que, se f é um difeomorfismo que preserva a orientação, então grau$(f) = +1$. De modo análogo, qualquer difeomorfismo que inverte a orientação tem grau$(f) = -1$.
Mostre que, se f não é sobrejectiva, então grau$(f) = 0$. Consequentemente, se grau$(f) \neq 0$, então a equação $f(p) = q$ tem soluções para todo o $q \in M$.

(2) Mostre que, se q é um valor regular de f, então a imagem inversa $f^{-1}(q)$ é um conjunto finito. Seja q um valor regular de f com imagem inversa $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$. (A existência de valores regulares é garantida pelo teorema de Sard.) Mostre que cada $df_{p_i} : T_{p_i}M \to T_qN$ é um isomorfismo.

(3) Define-se

$$\sigma_i = \begin{cases} +1 & \text{se } df_{p_i} \text{ preserva a orientação} \\ -1 & \text{se } df_{p_i} \text{ inverte a orientação} \end{cases}$$

onde $p_1, \dots, p_k$ são as pré-imagens de um valor regular q. Mostre que

$$\text{grau}(f) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \ .$$

Conclua que o grau de f é sempre um inteiro e que o número de soluções da equação $f(p) = q$, contado apropriadamente com sinais, não depende da escolha de q, e só depende da classe de homotopia de f.

(4) Seja W uma variedade orientada de dimensão $n+1$ com um domínio regular compacto $D \subset W$ tal que M é a fronteira de D, ou seja, tal que $i(M) = \partial D$ onde $i : M \hookrightarrow W$ é uma inclusão. Mostre que, se se puder estender f a uma aplicação suave $F : D \to N$ (i.e., $F \circ i = f$), então grau$(f) = 0$.

(5) Demonstre o teorema do ponto fixo de Brouwer:
Seja B^n a bola fechada de raio 1 em $\mathbb{R}^n$ e seja $\varphi : B^n \to B^n$ uma aplicação suave. Mostre, utilizando as alíneas anteriores, que φ tem um ponto fixo (pelo menos).

Sugestão: Mostre que, se φ não tivesse pontos fixos, poder-se-ia definir uma aplicação suave $F : B^n \to S^{n-1}$ que estende a aplicação identidade $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$.

Outono de 2000