Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 11

(para 6ª feira, 22 de Dezembro; basta entregar o exercício 2)

Conexões

(1) **Existência**

(a) Sejam E e F fibrados vectoriais sobre uma variedade M. Uma aplicação linear $L : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ entre secções desses fibrados diz-se um **operador local** se diminui os suportes, i.e., se $s \in \Gamma(E)$ se anula num aberto $\mathcal{U} \subseteq M$, então $L(s)$ também se anula em todo o $\mathcal{U}$.[1]
Mostre que uma conexão num fibrado vectorial E sobre M,

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E) ,$$

é um operador local.

(b) Pela alínea anterior, faz sentido falar na restrição da conexão ∇ a um subconjunto aberto de M. Mostre que ∇ é unicamente determinada pela sua restrição a cada um dos conjuntos abertos numa cobertura $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in I\}$ de M.

(c) O conjunto $\mathcal{A}(E)$ de todas as conexões num fibrado E sobre M não tem estrutura natural de espaço vectorial (em particular, não existe uma conexão especial para ser chamada zero). Mostre que, no entanto, $\mathcal{A}(E)$ é um conjunto convexo no seguinte sentido: se ∇^α e ∇^β são duas conexões em E e se $f \in C^\infty(M)$, então $f\nabla^\alpha + (1-f)\nabla^\beta$ define bem uma conexão em E.

(d) Mostre que qualquer fibrado E possui uma conexão.

(2) **Pullback**

Seja E um fibrado vectorial sobre M com projecção π_E. Dada uma aplicação $f : N \to M$, pode-se formar o fibrado vectorial **pullback** $F = f^*E$ sobre N definido por

$$F = \{(p, v) \in N \times E \,|\, f(p) = \pi_E(v)\}$$

com projecção $\pi_F : (p, v) \mapsto p$ de maneira a que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \pi_F \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

onde $\tilde{f}(p, v) = v$.

(a) Suponha que E é dado por uma colecção de funções de transição $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ relativas a uma cobertura $\{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in I\}$ de M. Quais são as funções de transição naturais e cobertura de N que descrevem o fibrado pullback $F = f^*E$?

---

[1] Diz-se "operador local" porque $L(s)$ num ponto p depende apenas dos valores de s em pontos duma vizinhança arbitrariamente pequena de p. Um **operador diferencial** é um operador $L : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ que pode ser expresso localmente como uma combinação linear de derivadas parciais com coeficientes em $\Gamma(F)$. Qualquer operador diferencial é um operador local. Um teorema de Peetre diz que qualquer operador local é um operador diferencial. Ref.: Peetre, J., Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels, *Math. Scand.* **7** (1959), 211-218 e **8** (1960), 116-120.

(b) Dada uma segunda aplicação $g : P \to N$ duma variedade P para N, mostre que existe um isomorfismo[2] canónico $g^*(f^*E) \simeq (f \circ g)^*E$.

(c) Mostre que existe uma aplicação canónica
$$f^* : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(F)$$
tal que $f^*(\varphi \cdot s) = (f^*\varphi) \cdot f^*s$ para $\varphi \in C^\infty(M)$ e $s \in \Gamma(E)$.
Do mesmo modo, mostre que existe uma aplicação canónica
$$f^* : \Gamma(T^*M \otimes E) \longrightarrow \Gamma(T^*N \otimes F) \ .$$
tal que $f^*(\alpha \otimes s) = (f^*\alpha) \otimes f^*s$ para $\alpha \in \Omega^1(M)$ e $s \in \Gamma(E)$.

(d) Mostre que a cada conexão ∇ em E corresponde uma e uma só conexão $f^*\nabla$ no fibrado pullback $F = f^*E$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:
$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E) & \stackrel{\nabla}{\longrightarrow} & \Gamma(T^*M \otimes E) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ \Gamma(F) & \stackrel{f^*\nabla}{\longrightarrow} & \Gamma(T^*N \otimes F) \end{array}$$
O nome **derivada covariante** para o operador ∇ vem desta covariância.

(3) **Homotopia**

(a) Seja E um fibrado vectorial sobre M, e sejam $f_0, f_1 : N \to M$ duas aplicações de uma variedade N para M. Suponha que f_0 e f_1 são (suavemente) **homotópicas**, ou seja, que existe uma aplicação (suave) $h : N \times [0,1] \to M$ tal que $h(\cdot, 0) = f_0$ e $h(\cdot, 1) = f_1$. Mostre que f_0^*E e f_1^*E são fibrados vectoriais isomórficos.

Sugestão: Defina $g_0, g_1 : N \to N \times [0,1]$ por $g_0(p) = (p, 0)$ e $g_1(p) = (p, 1)$. A homotopia h satisfaz $h \circ g_0 = f_0$ e $h \circ g_1 = f_1$. Considere a sequência
$$N \stackrel{g_0, g_1}{\longrightarrow} N \times [0,1] \stackrel{h}{\longrightarrow} M \ .$$
Basta mostrar que g_0^*F e g_1^*F são fibrados vectoriais isomórficos, onde $F = h^*E$ é um fibrado vectorial sobre $N \times [0,1]$. Equipe F com uma conexão. Seja
$$\tau_p : F_{(p,0)} \longrightarrow F_{(p,1)}$$
o transporte paralelo da fibra sobre $(p, 0)$ para a fibra sobre $(p, 1)$ ao longo da curva $t \mapsto (p, t)$.
Defina $\tau : g_0^*F \to g_1^*F$ por
$$\tau(p, v) = (p, \tau_p(v)) \ , \quad \text{para} \quad v \in F_{(p,0)} = (g_0^*F)_p \ .$$
Mostre que τ é um isomorfismo de fibrados vectoriais.

(b) Uma variedade diz-se **contráctil** quando a aplicação identidade $f_0 = \mathrm{id}_M : M \to M$ é homotópica a uma aplicação constante $f_1 : M \to \{p\}$ onde $p \in M$. Mostre que qualquer fibrado vectorial sobre uma variedade contráctil é trivializável.

Outono de 2000

[2] Um **isomorfismo** entre fibrados E e F sobre M é um difeomorfismo $\varphi : E \to F$ tal que $\pi_F \circ \varphi = \pi_E$ e $\varphi|_{E_p} : E_p \to F_p$ é linear para todo o $p \in M$, onde π_E e π_F são as projecções de E e F, respectivamente. Quando existe um isomorfismo entre E e F diz-se que são fibrados **isomórficos** e escreve-se $E \simeq F$.