Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 13

(não é para entregar)

Espaços Projectivos Complexos

(1) O **espaço projectivo complexo** $\mathbb{CP}^n$ é o espaço de todas as linhas complexas através da origem em $\mathbb{C}^{n+1}$, i.e. $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim$ onde a relação de equivalência $\sim$ é dada por

$$(z_0,\ldots,z_n) \sim (\lambda z_0,\ldots,\lambda z_n)\ , \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\ .$$

$[z_0,\ldots,z_n]$ representa a classe de equivalência de $(z_0,\ldots,z_n)$; diz-se que $z_0,\ldots,z_n$ são as **coordenadas homogéneas** do ponto $[z_0,\ldots,z_n] \in \mathbb{CP}^n$ (estas "coordenadas" só estão determinadas a menos de multiplicação por um número complexo não nulo).

Mostre que $\mathbb{CP}^n$ tem uma estrutura de variedade complexa.

Sugestão: Seja $\mathcal{U}_j$ o subconjunto dos pontos $[z_0,\ldots,z_n] \in \mathbb{CP}^n$ com $z_j \neq 0$ e seja

$$\varphi_j([z_0,\ldots,z_n]) = \left(\tfrac{z_0}{z_j},\ldots,\tfrac{z_{j-1}}{z_j},\tfrac{z_{j+1}}{z_j},\ldots,\tfrac{z_n}{z_j}\right)\ .$$

Mostre que a colecção $\{(\mathcal{U}_j,\mathbb{C}^n,\varphi_j) \mid j=0,\ldots,n\}$ é um atlas no sentido complexo, i.e. as funções de transição são bi-holomorfas.

(2) Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{CP}^n$ a projecção natural dada por $(z_0,\ldots,z_n) \mapsto [z_0,\ldots,z_n]$.

(a) Sejam $\frac{\partial}{\partial z_j}$, $j=0,1,\ldots,n$, os campos vectoriais definidos pelas coordenadas de $\mathbb{C}^{n+1}$. Mostre que, para cada função $\mathbb{C}$-linear $h : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$, os campos vectoriais X em $\mathbb{C}^{n+1}$ definidos por $X_z = h(z)\frac{\partial}{\partial z_j}$ descem para $\mathbb{CP}^n$, i.e. mostre que $d\pi_z(X_z) = d\pi_{\lambda z}(X_{\lambda z})$ para quaisquer $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Denota-se por $\pi_* X$ o campo assim induzido em $\mathbb{CP}^n$.

Sugestão: Em $\mathcal{U}_0$ tem-se coordenadas $Z_1 = \frac{z_1}{z_0},\ldots,Z_n = \frac{z_n}{z_0}$. Como

$$\pi^* dZ_j = \frac{z_0 dz_j - z_j dz_0}{z_0^2}\ ,$$

as imagens por π dos campos vectoriais $\frac{\partial}{\partial z_j}$ são

$$d\pi_z\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = \frac{1}{z_0}\cdot\frac{\partial}{\partial Z_j}\ ,\ j=1,\ldots,n\ , \quad \text{e} \quad d\pi_z\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right) = -\sum \frac{z_j}{z_0^2}\cdot\frac{\partial}{\partial Z_j}\ .$$

(b) Mostre que o espaço tangente a $\mathbb{CP}^n$ em $[z_0,\ldots,z_n]$ com $z_0 \neq 0$ é gerado pelos vectores $d\pi_z\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)$, $j=0,\ldots,n$, onde $z=(z_0,\ldots,z_n)$.

Mostre que a única relação entre estes vectores é $\sum z_j d\pi_z\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = 0$.

(3) O **fibrado de hiperplanos** de $\mathbb{CP}^n$ é o fibrado de linhas complexas sobre $\mathbb{CP}^n$ $H = \left\{(p,h) : p \in \mathbb{CP}^n, h \text{ é função } \mathbb{C}\text{-linear na linha } p \subseteq \mathbb{C}^{n+1}\right\}$ com projecção $(p,h) \mapsto p$.

(a) Define-se um morfismo de fibrados

$$H^{\oplus(n+1)} := \underbrace{H \oplus \ldots \oplus H}_{n+1} \quad \xrightarrow{\phi} \quad T\mathbb{CP}^n$$

pela fórmula $\phi(h_0,\ldots,h_n) = d\pi_z(\sum h_j(z)\frac{\partial}{\partial z_j})$, onde $(h_0,\ldots,h_n)$ está na fibra de $H^{\oplus(n+1)}$ sobre $p=[z]$; cada h_j é uma função $\mathbb{C}$-linear na linha $p \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ que se estende a $\mathbb{C}^{n+1} = p \oplus p^\perp$ como sendo zero no complemento hermítico $p^\perp$. Mostre que ϕ é sobrejectiva. **Sugestão:** Exercício 2.

(b) Mostre que o núcleo de ϕ é o subfibrado trivial de linhas complexas gerado pela secção $(z_0,\ldots,z_n)$; aqui z_j representa a secção que dá a j-ésima coordenada.

(c) Mostre que $H^{\oplus(n+1)} \simeq T\mathbb{CP}^n \oplus \mathbb{C}$, onde $\mathbb{C}$ representa o fibrado trivial de linhas complexas sobre $\mathbb{CP}^n$.

Outono de 2000