

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 14

(não é para entregar)

Fibrados de Linhas sobre a Esfera de Riemann

A esfera de Riemann,  $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ , é o conjunto das linhas (complexas) em  $\mathbb{C}^2$  através da origem.

O **fibrado de hiperplanos** de  $\mathbb{CP}^1$  é o fibrado de linhas complexas sobre  $\mathbb{CP}^1$

$H = \{(p, h) \mid p \in \mathbb{CP}^1, h \text{ é função } \mathbb{C}\text{-linear na linha } p \subset \mathbb{C}^2\}$  com projecção  $(p, h) \mapsto p$ .

O **fibrado tautológico** de  $\mathbb{CP}^1$  é o fibrado de linhas complexas sobre  $\mathbb{CP}^1$

$H^* = \{(p, v) \mid p \in \mathbb{CP}^1, v \text{ é um vector na linha } p \subset \mathbb{C}^2\}$  com projecção  $(p, v) \mapsto p$ .

(1) **Normalização das classes de Chern**

- (a) Sejam  $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  coordenadas homogéneas em  $\mathbb{CP}^1$ . As funções  $Z = \frac{z_1}{z_0}$  e  $W = \frac{z_0}{z_1}$  definem coordenadas locais em  $\mathcal{U}_0 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{CP}^1 \mid z_0 \neq 0\}$  e  $\mathcal{U}_1 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{CP}^1 \mid z_1 \neq 0\}$ , respectivamente. Considere as formas-1 locais

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z d\bar{Z} - \bar{Z} dZ}{1 + |Z|^2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{W d\bar{W} - \bar{W} dW}{1 + |W|^2}$$

em  $\mathcal{U}_0$  e  $\mathcal{U}_1$ . Mostre que  $\omega$  e  $\theta$  juntas definem uma conexão em  $H$ , mais concretamente, verifique que  $\theta = \psi_{01}^{-1} d\psi_{01} + \omega$  onde  $\psi_{01}(Z) = \frac{Z}{|Z|}$  é a função de transição.

- (b) Calcule as formas de curvatura  $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$  e  $\Theta = d\theta + \theta \wedge \theta$  associadas à conexão da alínea anterior. Verifique que em  $\mathcal{U}_0$

$$\frac{i}{2\pi} \Omega = \frac{r dr \wedge dt}{\pi(1+r^2)^2},$$

onde  $r, t$  são coordenadas polares tais que  $Z = re^{it}$ .

- (c) Calcule o integral da classe de Chern  $c_1(H) \in H^2(\mathbb{CP}^1)$  sobre  $\mathbb{CP}^1$ , ou seja, calcule o integral sobre  $\mathbb{CP}^1$  da forma característica  $c_1$  definida por  $c_1|_{\mathcal{U}_0} = \frac{i}{2\pi} \Omega$  e  $c_1|_{\mathcal{U}_1} = \frac{i}{2\pi} \Theta$ .

**Sugestão:**  $\mathcal{U}_0$  é  $\mathbb{CP}^1$  menos um único ponto.

- A forma-2 em  $\mathbb{CP}^1$  definida por  $\frac{i}{2} \Omega$  em  $\mathcal{U}_0$  e  $\frac{i}{2} \Theta$  em  $\mathcal{U}_1$  é uma forma simpléctica, chamada a **forma de Fubini-Study**.

(2) **Família de fibrados de linhas**

- (a) Se  $u = c_1(H)$  for a primeira classe de Chern de  $H$ , qual é a classe de Chern de  $T\mathbb{CP}^1$ ? Qual é o integral sobre  $\mathbb{CP}^1$  de  $c_1(\mathbb{CP}^1) := c_1(T\mathbb{CP}^1)$ ?

Este cálculo confirma o teorema de Gauss-Bonnet para a esfera.

**Sugestão:** Exercício (1.c) acima e exercício (3.c) da ficha 13.

- (b) Mostre que  $H^* \otimes H \simeq \mathbb{C}$  onde  $\mathbb{C}$  representa o fibrado trivial de linhas complexas sobre  $\mathbb{CP}^1$  e o produto tensorial é sobre os complexos.

**Sugestão:**  $H^* \otimes H$  tem uma secção global  $s$  que nunca se anula: se  $h : p \rightarrow \mathbb{C}$  é linear e não identicamente nula, escolha-se  $v \in p$  tal que  $h(v) = 1$  e tome-se  $s(p) = h \otimes v$ .

- (c) Para  $n \in \mathbb{Z}$ , definam-se os seguintes fibrados de linhas sobre  $\mathbb{CP}^1$ :

$$\mathcal{O}(n) := \begin{cases} \overbrace{H \otimes H \otimes \dots \otimes H}^n, & n > 0 \\ \mathbb{C}, & n = 0 \\ \underbrace{H^* \otimes \dots \otimes H^*}_{|n|}, & n < 0. \end{cases}$$

Se  $u = c_1(H)$  for a primeira classe de Chern de  $H$ , qual é a classe de Chern de  $\mathcal{O}(n)$ ? Qual é o integral sobre  $\mathbb{CP}^1$  de  $c_1(\mathcal{O}(n))$ ?

Conclua que, se  $u \neq 0$ , os fibrados  $\mathcal{O}(n)$  e  $\mathcal{O}(m)$  não são isomórficos para  $n \neq m$ .

- Os  $\mathcal{O}(n)$ 's formam a lista *completa* de fibrados de linhas sobre  $\mathbb{CP}^1$ , a menos de isomorfismo.