Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 14

(não é para entregar)

Fibrados de Linhas sobre a Esfera de Riemann

A esfera de Riemann, $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$, é o conjunto das linhas (complexas) em $\mathbb{C}^2$ através da origem.
O **fibrado de hiperplanos** de $\mathbb{CP}^1$ é o fibrado de linhas complexas sobre $\mathbb{CP}^1$
$H = \{(p,h) \mid p \in \mathbb{CP}^1, h$ é função $\mathbb{C}$-linear na linha $p \subset \mathbb{C}^2\}$ com projecção $(p,h) \mapsto p$.
O **fibrado tautológico** de $\mathbb{CP}^1$ é o fibrado de linhas complexas sobre $\mathbb{CP}^1$
$H^* = \{(p,v) \mid p \in \mathbb{CP}^1, v$ é um vector na linha $p \subset \mathbb{C}^2\}$ com projecção $(p,v) \mapsto p$.

(1) **Normalização das classes de Chern**

(a) Sejam $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ coordenadas homogéneas em $\mathbb{CP}^1$. As funções $Z = \frac{z_1}{z_0}$ e $W = \frac{z_0}{z_1}$ definem coordenadas locais em $\mathcal{U}_0 = \{[z_0, z_1] \in \mathbb{CP}^1 \mid z_0 \neq 0\}$ e $\mathcal{U}_1 = \{[z_0, z_1] \in \mathbb{CP}^1 \mid z_1 \neq 0\}$, respectivamente. Considere as formas-1 locais

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z d\bar{Z} - \bar{Z} dZ}{1 + |Z|^2} \qquad \text{e} \qquad \theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{W d\bar{W} - \bar{W} dW}{1 + |W|^2}$$

em $\mathcal{U}_0$ e $\mathcal{U}_1$. Mostre que ω e θ juntas definem uma conexão em H, mais concretamente, verifique que $\theta = \psi_{01}^{-1} d\psi_{01} + \omega$ onde $\psi_{01}(Z) = \frac{Z}{|Z|}$ é a função de transição.

(b) Calcule as formas de curvatura $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ e $\Theta = d\theta + \theta \wedge \theta$ associadas à conexão da alínea anterior. Verifique que em $\mathcal{U}_0$

$$\frac{i}{2\pi}\Omega = \frac{r\ dr \wedge dt}{\pi(1 + r^2)^2} \ ,$$

onde r, t são coordenadas polares tais que $Z = re^{it}$.

(c) Calcule o integral da classe de Chern $c_1(H) \in H^2(\mathbb{CP}^1)$ sobre $\mathbb{CP}^1$, ou seja, calcule o integral sobre $\mathbb{CP}^1$ da forma característica c_1 definida por $c_1|_{\mathcal{U}_0} = \frac{i}{2\pi}\Omega$ e $c_1|_{\mathcal{U}_1} = \frac{i}{2\pi}\Theta$.

Sugestão: $\mathcal{U}_0$ é $\mathbb{CP}^1$ menos um único ponto.

- A forma-2 em $\mathbb{CP}^1$ definida por $\frac{i}{2}\Omega$ em $\mathcal{U}_0$ e $\frac{i}{2}\Theta$ em $\mathcal{U}_1$ é uma forma simpléctica, chamada a **forma de Fubini-Study**.

(2) **Família de fibrados de linhas**

(a) Se $u = c_1(H)$ for a primeira classe de Chern de H, qual é a classe de Chern de $T\mathbb{CP}^1$? Qual é o integral sobre $\mathbb{CP}^1$ de $c_1(\mathbb{CP}^1) := c_1(T\mathbb{CP}^1)$?
Este cálculo confirma o teorema de Gauss-Bonnet para a esfera.

Sugestão: Exercício (1.c) acima e exercício (3.c) da ficha 13.

(b) Mostre que $H^* \otimes H \simeq \mathbb{C}$ onde $\mathbb{C}$ representa o fibrado trivial de linhas complexas sobre $\mathbb{CP}^1$ e o produto tensorial é sobre os complexos.

Sugestão: $H^* \otimes H$ tem uma secção global s que nunca se anula: se $h : p \to \mathbb{C}$ é linear e não identicamente nula, escolha-se $v \in p$ tal que $h(v) = 1$ e tome-se $s(p) = h \otimes v$.

(c) Para $n \in \mathbb{Z}$, definam-se os seguintes fibrados de linhas sobre $\mathbb{CP}^1$:

$$\mathcal{O}(n) := \begin{cases} \overbrace{H \otimes H \otimes \ldots \otimes H}^{n} \ , & n > 0 \\ \mathbb{C} \ , & n = 0 \\ \underbrace{H^* \otimes \ldots \otimes H^*}_{|n|} \ , & n < 0 \ . \end{cases}$$

Se $u = c_1(H)$ for a primeira classe de Chern de H, qual é a classe de Chern de $\mathcal{O}(n)$? Qual é o integral sobre $\mathbb{CP}^1$ de $c_1(\mathcal{O}(n))$?
Conclua que, se $u \neq 0$, os fibrados $\mathcal{O}(n)$ e $\mathcal{O}(m)$ não são isomórficos para $n \neq m$.

- Os $\mathcal{O}(n)$'s formam a lista *completa* de fibrados de linhas sobre $\mathbb{CP}^1$, a menos de isomorfismo.

Outono de 2000