Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 2

(para 2ª feira, 16 de Outubro)

Grupo Ortogonal

Seja $\mathrm{O}(n)$ o conjunto de todas as matrizes ortogonais $n \times n$, ou seja, o conjunto das matrizes reais $n \times n$, $A = (a_{ij})$, com a propriedade $AA^t = \mathrm{Id}$, onde $A^t = (a_{ji})$ é a matriz transposta de A.

(1) Mostre que $\mathrm{O}(n)$ é um grupo relativamente à multiplicação de matrizes.
$\mathrm{O}(n)$ chama-se o **grupo ortogonal**.

(2) Seja $\mathrm{M}(n)$ o conjunto das matrizes reais $n \times n$. Alinhando todas as linhas duma matriz $n \times n$ numa só linha, obtemos uma identificação $\mathrm{M}(n) = \mathbb{R}^{n^2}$, que permite interpretar $\mathrm{M}(n)$ como espaço vectorial euclideano de dimensão n^2. Mostre que $\mathrm{O}(n)$ é uma subvariedade de $\mathrm{M}(n)$ com dimensão $n(n-1)/2$. As seguintes etapas podem ser úteis:

(a) Seja $\mathrm{S}(n)$ o subconjunto das matrizes simétricas $n \times n$, i.e.,

$$\mathrm{S}(n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{A \in \mathrm{M}(n) \mid A = A^t\} \ .$$

Mostre que $\mathrm{S}(n)$ é um subespaço vectorial de $\mathrm{M}(n)$ com dimensão $n(n+1)/2$.

(b) Seja $f : \mathrm{M}(n) \to \mathrm{S}(n)$ a aplicação

$$f(A) = AA^t \ .$$

Verifique que f está bem definida, ou seja, para qualquer matriz $A \in \mathrm{M}(n)$, o produto AA^t é uma matriz simétrica. Mostre que f é uma aplicação suave.

(c) Mostre que a derivada de f no ponto $A \in \mathrm{M}(n)$ é a aplicação

$$df_A : \mathrm{M}(n) \longrightarrow \mathrm{S}(n) \ , \qquad df_A(B) = AB^t + BA^t \ .$$

Sugestão: $df_A(B) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(A+\varepsilon B) - f(A)}{\varepsilon}$.

(d) Mostre que Id é um valor regular de f.

(3) Qual é o espaço tangente a $\mathrm{O}(n)$ num ponto $A \in \mathrm{O}(n)$ como subespaço de $\mathrm{M}(n)$?

Sugestão: Qual é o núcleo de df_A?

Em particular, qual é o espaço tangente em $A = \mathrm{Id}$?

(4) Mostre que as operações de multiplicação e inversão em $\mathrm{O}(n)$ são suaves. $\mathrm{O}(n)$ é um exemplo de um **grupo de Lie**: uma variedade com estrutura de grupo onde as operações são suaves.

(5) Mostre que a variedade $\mathrm{O}(n)$ é compacta.

Sugestão: A topologia natural em $\mathrm{O}(n)$ coincide com a topologia induzida como subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$.

(6) Mostre que $\mathrm{O}(n)$ é uma união disjunta de duas componentes conexas, sendo uma das componentes o subgrupo

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\} \ ,$$

chamado o **grupo especial ortogonal**.