**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 3

(para 2ª feira, 16 de Outubro, ⋆ em alternativa à ficha 2 ⋆)

# Variedades Algébricas

Uma **variedade algébrica** é uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$ definida por equações polinomiais.

(1) Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \ .$$

(a) Prove que, se $a, b \in \mathbb{R}$ são ambos positivos ou ambos negativos, então $f^{-1}(a)$ e $f^{-1}(b)$ são variedades difeomorfas.

**Sugestão:** Considere a aplicação $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por multiplicação por $\sqrt{\frac{b}{a}}$.

(b) Examine com esboços a mudança drástica na topologia de $f^{-1}(c)$ quando $c$ passa pelo valor crítico 0.

(2) Seja $p$ um polinómio homogéneo[1] em $n$ variáveis.

(a) Prove que o conjunto de soluções da equação

$$p(x) = a$$

é uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n - 1$, desde que $a \neq 0$.

**Sugestão:** Demonstre a identidade de Euler para polinómios homogéneos de grau $m$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = mp \ .$$

(b) Mostre que as variedades obtidas com $a > 0$ são todas difeomorfas, assim como as variedades obtidas com $a < 0$.

(3) Prove que o conjunto de todas as matrizes $2 \times 2$ com característica 1 é uma subvariedade de dimensão 3 em $\mathbb{R}^4$.

**Sugestão:** Analise a função determinante.

(4) Prove que o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ com característica $k$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{mn}$ de codimensão $(m - k)(n - k)$.

**Sugestão:** Sem perda de generalidade, considere uma matriz $M$ da forma

$$M = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) & \begin{array}{c} {\scriptstyle k} \\ {\scriptstyle m-k} \end{array} \\ \begin{array}{cc} {\scriptstyle k} \quad & \quad {\scriptstyle n-k} \end{array} & \end{array}$$

onde $A$ é uma matriz $k \times k$ não singular. Multiplique $M$ por

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id} & -A^{-1}B \\ \hline 0 & \mathrm{Id} \end{array}\right) & \begin{array}{c} {\scriptstyle k} \\ {\scriptstyle n-k} \end{array} \\ \begin{array}{cc} {\scriptstyle k} \quad & \quad {\scriptstyle n-k} \end{array} & \end{array}$$

à direita para provar que a característica de $M$ é $k$ se e só se $D - CA^{-1}B = 0$.

Outono de 2000

[1] **Homogeneidade de grau** $m$ significa que

$$p(tx_1, \dots, tx_n) = t^m p(x_1, \dots, x_n) \ , \qquad \forall t \ , \quad \forall x_i \ .$$