Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 4

(para 2ª feira, 30 de Outubro)

Exponenciais de Matrizes

(1) Seja A uma matriz real $n \times n$.

(a) Mostre que a série

$$e^{tA} = \mathrm{Id} + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \ldots$$

converge uniformemente em intervalos compactos de $\mathbb{R}$ como função de t.

(b) Mostre que e^{tA} é diferenciável em t e

$$\frac{d}{dt}\, e^{tA} = e^{tA}A = Ae^{tA} \ .$$

Sugestão: Mostre que, se se derivar a série acima termo a termo, obtém-se uma série uniformemente convergente em intervalos compactos.

Conclua que e^{tA} é suave em t.

(2) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real $n \times n$ e seja v_A o seguinte campo vectorial em $\mathbb{R}^n$:

$$v_A(x) = \sum_{i,j}(a_{ij}x_j)\frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Mostre que v_A gera um grupo de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$.

Sugestão: Seja y um ponto arbitrário de $\mathbb{R}^n$. Mostre que a curva

$$t \longmapsto e^{tA}y \ , \quad -\infty < t < \infty \ ,$$

é a (única) curva integral de v_A passando por y no instante 0.

Conclua que

$$e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A} \ .$$

(3) Seja $\mathrm{GL}(n)$ o grupo das matrizes reais $n \times n$ invertíveis e seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n)$ um homomorfismo do grupo aditivo dos números reais para $\mathrm{GL}(n)$. Supondo que φ é suave, prove que existe uma matriz $n \times n$, A, tal que $\varphi(t) = e^{tA}$ para todo o $t \in \mathbb{R}$.

(4) Sejam A e B duas matrizes $n \times n$. Mostre que

$$[v_A, v_B] = v_{[B,A]} \ ,$$

onde $[v_A, v_B]$ é o parêntesis de Lie de v_A e v_B e $[B, A] = BA - AB$.

(5) Sejam A e B duas matrizes $n \times n$. Prove que as seguintes três propriedades são equivalentes:

(i) A e B comutam;

(ii) e^{tA} e e^{sB} comutam para todo o s e t; e

(iii) o parêntesis de Lie de v_A e v_B é zero.

(6) Seja A uma matriz $n \times n$. Prove que as seguintes duas propriedades são equivalentes:

(i) a transposta de A é $-A$; e

(ii) e^{tA} está em $\mathrm{O}(n)$ para todo o $t \in \mathbb{R}$.