Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 5

(para 2ª feira, 13 de Novembro)

Teorema de Frobenius

(1) Seja M uma variedade de dimensão n e sejam $v_1, \ldots, v_n$ campos vectoriais em M com as seguintes propriedades:

(A) $v_1(p), \ldots, v_n(p)$ são linearmente independentes em todos os pontos $p \in M$;
(B) $[v_i, v_j] = \sum_k c_{ij}^k v_k$, onde os c_{ij}^k's são constantes reais.

Mostre que os c_{ij}^k's não podem ser números reais arbitrários: eles têm que satisfazer

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \qquad \text{e} \qquad \sum_l \left(c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m \right) = 0 \qquad \forall\ i, j, k, m\ .$$

(2) Seja N outra variedade de dimensão n e sejam $w_1, \ldots, w_n$ campos vectoriais em N com as propriedades (A) e (B) com as *mesmas* constantes c_{ij}^k. Mostre que, para cada $p \in M$ e cada $q \in N$, existe um difeomorfismo f, duma vizinhança $\mathcal{U}$ de p para uma vizinhança $\mathcal{V}$ de q, tal que

(I) $f(p) = q$, e
(II) $f_* v_i = w_i$, para $i = 1, \ldots n$.

As seguintes alíneas descrevem uma estratégia possível:

(a) Considere a variedade $M \times N$. Sejam π e χ as projecções standard de $M \times N$ para M e N levando (p, q) para p e q, respectivamente.
Mostre que, se v é um campo vectorial em M, existe um único campo vectorial v' em $M \times N$, tal que, para cada ponto $z = (p, q) \in M \times N$,
$$d\pi_z(v'(z)) = v(p) \qquad \text{e} \qquad d\chi_z(v'(z)) = 0\ .$$
Do mesmo modo mostre que, para cada campo vectorial w em N, existe um único campo vectorial w'' em $M \times N$, tal que
$$d\pi_z(w''(z)) = 0 \qquad \text{e} \qquad d\chi_z(w''(z)) = w(q)\ .$$
Prove que as aplicações $v \mapsto v'$ e $w \mapsto w''$ são homomorfismos de álgebras de Lie, i.e., são aplicações lineares e preservam o parêntesis de Lie. Mostre ainda que $[v', w''] = 0$.

(b) Seja $\mathcal{D}$ a distribuição de dimensão n em $M \times N$ gerada pelos campos vectoriais
$$v_i' + w_i''\ , \qquad i = 1, \ldots, n\ .$$
Prove que $\mathcal{D}$ satisfaz a condição de Frobenius.
Sugestão: Use a alínea (a) e as propriedades (A) e (B) para os v_i's e para os w_i's.

(c) Seja Z a variedade integral da distribuição $\mathcal{D}$ através do ponto (p, q).
Mostre que as restrições de π e χ a Z levam uma vizinhança $\mathcal{W}$ de (p, q) difeomorficamente para vizinhanças $\mathcal{U}$ de p e $\mathcal{V}$ de q, respectivamente.

(d) Seja $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ o difeomorfismo obtido compondo o inverso do difeomorfismo de $\mathcal{W}$ para $\mathcal{U}$ com o difeomorfismo de $\mathcal{W}$ para $\mathcal{V}$ que construiu na alínea (c).
Mostre que f tem as propriedades (I) e (II).

(3) Usando a unicidade da variedade integral $\mathcal{W}$, prove um resultado de unicidade para f.

(4) Tomando $M = N$ e $v_i = w_i$, prove que, para cada par de pontos p e q em M, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p, uma vizinhança $\mathcal{V}$ de q e um difeomorfismo $f_{p,q} : (\mathcal{U}, p) \to (\mathcal{V}, q)$ tal que, para $i = 1, \ldots, n$,
$$(f_{p,q})_* v_i = v_i\ .$$
Usando o exercício (3), mostre que estes difeomorfismos satisfazem a propriedade de grupo: $f_{q,r} \circ f_{p,q} = f_{p,r}$, numa vizinhança de p suficientemente pequena.

Outono de 2000