Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 6

(não é para entregar)

Álgebra Multilinear

Seja V um espaço vectorial de dimensão n. Um **tensor-k** (ou **função k-linear**) em V é uma função $t : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} & t(v_1, \ldots, v_{i-1}, av_i + bv_i', v_{i+1}, \ldots, v_k) \\ = \; & at(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k) + bt(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

para quaisquer $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ e v's em V. Um tensor-1 é simplesmente um elemento do dual V^*, ou seja, uma função linear $V \to \mathbb{R}$. Um tensor-0 é um número real. Seja $\mathcal{T}^k$ o conjunto de todos os tensores-k em V.

(1) Para $t, u \in \mathcal{T}^k$ e $a, b \in \mathbb{R}$, seja

$$(at + bu)(v_1, \ldots v_k) \stackrel{\mathsf{def}}{=} at(v_1, \ldots v_k) + bu(v_1, \ldots v_k) \ .$$

Mostre que $at + bu$ é um tensor-k, pelo que $\mathcal{T}^k$ é um espaço vectorial.

(2) O **produto tensorial** $t \otimes u$ de tensores $t \in \mathcal{T}^k$ e $u \in \mathcal{T}^l$ é um tensor-$(k + l)$ em V definido por

$$t \otimes u(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = t(v_1, \ldots, v_k) \cdot u(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) \ .$$

Verifique que o produto tensorial é associativo, isto é, $(t \otimes u) \otimes w = t \otimes (u \otimes w)$, mas não é comutativo, ou seja, dê um exemplo onde $t \otimes u \neq u \otimes t$.

(3) Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base para V. Definem-se aplicações lineares **duais**

$$e_i^* : V \longrightarrow \mathbb{R} \ , \qquad e_i^*(c_1e_1 + \ldots + c_ne_n) = c_i \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ .$$

Mostre que $e_1^*, \ldots, e_n^*$ é uma base para V^*.

(4) Daqui em diante $e_1, \ldots, e_n$ é uma base para V e $e_1^*, \ldots, e_n^*$ é a base dual para V^*. Mostre que qualquer $t \in \mathcal{T}^k$ é da forma

$$t = \sum t^{i_1 \ldots i_k} e_{i_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{i_k}^*$$

onde a soma é sobre todos os índices $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$ e os $t^{i_1 \ldots i_k}$'s são números reais.

Sugestão: $t^{i_1 \cdots i_k} = t(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$.

(5) Mostre que $\{e_{i_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n\}$ é uma base para $\mathcal{T}^k$. Qual é a dimensão de $\mathcal{T}^k$?

Sugestão: O exercício 4 mostra que este conjunto gera $\mathcal{T}^k$. Para a independência linear, suponha que $\sum t^{i_1 \cdots i_k} e_{i_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{i_k}^* = 0$ e avalie ambos os lados desta igualdade de tensores em $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$.

Ao espaço vectorial

$$\mathcal{T} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \underbrace{\mathcal{T}^0}_{\mathbb{R}} \oplus \underbrace{\mathcal{T}^1}_{V^*} \oplus \mathcal{T}^2 \oplus \ldots$$

equipado com o produto tensorial $\otimes$ chama-se a **álgebra tensorial** de V^*.

(6) Uma **permutação** de $\{1, 2, \ldots, k\}$ é uma aplicação bijectiva $\sigma : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Uma permutação é **par** (respectivamente, **ímpar**) se for a composição de um número par (respectivamente, ímpar) de transposições, sendo uma tranposição uma permutação que fixa todos os elementos de $\{1, \ldots, k\}$ excepto dois que são trocados; qualquer permutação ou é par ou é ímpar. Um tensor-k, $t : V \times \ldots \times V \to \mathbb{R}$, é **alternante** se para toda a permutação σ de $\{1, \ldots, k\}$ e para quaisquer vectores $v_1, \ldots, v_k \in V$, se tem

$$t(v_1, \ldots, v_k) = (-1)^\sigma t(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$

onde $(-1)^\sigma$ representa o **sinal** da permutação σ:

$$(-1)^\sigma = \begin{cases} + & \text{se } \sigma \text{ é par} \\ - & \text{se } \sigma \text{ é ímpar} . \end{cases}$$

Seja Λ^k o conjunto de todos os tensores-k em V alternantes. Em particular, $\Lambda^0 = \mathcal{T}^0 = \mathbb{R}$ e $\Lambda^1 = \mathcal{T}^1 = V^*$. Mostre que Λ^k é um subespaço vectorial de $\mathcal{T}^k$ (mas não uma subálgebra).

(7) Defina-se a aplicação linear $\mathrm{alt} : \mathcal{T}^k \to \Lambda^k$, $t \mapsto t^{\mathrm{alt}}$ com a expressão

$$t^{\mathrm{alt}}(v_1, \ldots, v_k) = \sum (-1)^\sigma t(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$

onde a soma é sobre todas as permutações σ de $\{1, \ldots, k\}$.

Verifique que se $l_1^*, \ldots, l_k^* \in V^*$ e $v_1, \ldots, v_k \in V$, então

$$(l_1^* \otimes \ldots \otimes l_k^*)^{\mathrm{alt}}(v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{bmatrix} l_1^*(v_1) & \ldots & l_1^*(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ l_k^*(v_1) & \ldots & l_k^*(v_k) \end{bmatrix} .$$

Mostre que, se $i_1 < \ldots < i_k$ e $j_1 < \ldots < j_k$, então

$$(e_{i_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{i_k}^*)^{\mathrm{alt}}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i_1 = j_1 \text{ e } \ldots \text{ e } i_k = j_k \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(8) Mostre que, se $t \in \Lambda^k \subseteq \mathcal{T}^k$, então $t^{\mathrm{alt}} = k!t$. Logo, a aplicação alt é sobrejectiva.

(9) O **produto exterior** $t \wedge u$ de tensores alternantes $t \in \Lambda^k$ e $u \in \Lambda^l$ é o tensor-$(k + l)$ alternante definido por

$$(t \wedge u)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \sum (-1)^\sigma t(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \cdot u(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})$$

onde a soma é sobre todas as permutações σ de $\{1, \ldots, k + l\}$ tais que $\sigma(1) < \ldots < \sigma(k)$ e $\sigma(k + 1) < \ldots < \sigma(k + l)$. Verifique que o produto tensorial é associativo.

(10) Verifique que $e_i^* \wedge e_j^* + e_j^* \wedge e_i^* = 0$ e, mais geralmente,

$$e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_r}^* \wedge e_{i_{r+1}}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^* = -e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_{r+1}}^* \wedge e_{i_r}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^* .$$

(11) Mostre que $\mathcal{B} = \{e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\}$ é uma base para Λ^k. Qual é a dimensão de Λ^k? Em particular, qual é a dimensão de Λ^n?

Sugestão: A imagem por alt da base de $\mathcal{T}^k$ no exercício 5 gera Λ^k porque alt é sobrejectiva. Pelo exercício 10, o subconjunto $\mathcal{B}$ ainda gera Λ^k. Para a independência linear, suponha que $\sum a^{i_1 \cdots i_k} e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^* = 0$ (onde se soma sobre $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$) e avalie ambos os lados desta igualdade em $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$ com $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$ usando o exercício 7.

(12) Mostre que $t \wedge u = (-1)^{kl} u \wedge t$ para $t \in \Lambda^k$ e $u \in \Lambda^l$.

Ao espaço vectorial

$$\Lambda \stackrel{\mathsf{def}}{=} \underbrace{\Lambda^0}_{\mathbb{R}} \oplus \underbrace{\Lambda^1}_{V^*} \oplus \Lambda^2 \oplus \ldots$$

equipado com o produto exterior $\wedge$ chama-se a **álgebra exterior** de V^*.