Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 7

(para 2ª feira, 27 de Novembro)

Lema de Poincaré

(1) Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança convexa da origem em $\mathbb{R}^n$. Demonstre o **lema de Poincaré**:

(a) Mostre que qualquer forma-1 fechada em $\mathcal{U}$ é exacta.

Sugestão: Seja $\omega = \sum h_j\, dx_j$ uma forma-1 fechada em $\mathcal{U}$. Mostre que $\omega = df$ onde

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 x_j\, h_j(tx)\, dt \ .$$

(b) Generalize o resultado do exercício anterior para formas-k, i.e., mostre que qualquer forma-k fechada em $\mathcal{U}$ é exacta para $k \geq 1$.

Sugestão: Dada uma forma-k arbitrária, $1 \leq k \leq n$,

$$\omega = \sum_I h_I\, dx_I = \sum h_{i_1 \cdots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \ ,$$

prove que $dQ\omega + Qd\omega = \omega$, onde $Q\omega$ é a forma-$(k-1)$ definida por

$$(Q\omega)_x = \sum_{I,r} (-1)^{r-1} x_{i_r} \left(\int_0^1 t^{k-1} h_I(tx)\, dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \ .$$

(c) Calcule os grupos $H^k_{\text{deRham}}(\mathcal{U})$ de co-homologia de de Rham de $\mathcal{U}$, $0 \leq k \leq n$.

(2) Sejam M uma variedade de dimensão n e ω uma forma-1 em M. Seja $\gamma : [a,b] \to M$ uma aplicação (suave) do intervalo $[a,b]$ para M e seja $\gamma^*\omega = g(t)dt$. O **integral de** ω **sobre** γ é

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b g(t)dt \ .$$

(a) Mostre que este integral é independente da parametrização da curva γ, i.e., mostre que se $h : [c,d] \to [a,b]$ é um difeomorfismo que preserva a orientação e $\gamma_1 = \gamma \circ h$, então

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega \ .$$

(b) Mostre que, se ω é exacta, i.e., $\omega = df$, então $\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

(3) Uma variedade M é **simplesmente conexa** se for conexa e qualquer aplicação da circunferência S^1 para M for homotópica[1] a uma aplicação constante. Seja M uma variedade simplesmente conexa de dimensão n. Mostre que qualquer forma-1 fechada em M é exacta.

Sugestão: Seja ω uma forma-1 fechada em M. Fixe um ponto de base p_0, seja p um ponto qualquer de M e seja $\gamma : [a,b] \to M$ uma curva (suave) ligando p_0 a p. Defina

$$f(p) = \int_\gamma \omega \ .$$

Mostre que esta definição não depende da escolha de γ, i.e., mostre que se γ e γ_1 são curvas ligando p_0 a p, então

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

(use o exercício 1). Mostre que f depende suavemente de p e que $\omega = df$.

(4) Seja $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mostre que a forma-1

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

é fechada em M mas que *não* é exacta. Mostre que qualquer forma-1 fechada em M pode ser escrita como um múltiplo constante de ω mais uma forma-1 exacta.

Outono de 2000

[1] Duas aplicações f_0 e f_1 de S para M dizem-se (suavemente) **homotópicas** se existir uma aplicação $F : S \times [0,1] \to M$ tal que $F(p,0) = f_0(p)$ e $F(p,1) = f_1(p)$, para todo o $p \in S$; F chama-se então uma **homotopia** entre f_0 e f_1.