Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 8

(não é para entregar)

Orientação

(1) Seja M uma variedade conexa de dimensão n.

(a) Dados dois pontos quaisquer p e q em M, seja $\gamma : I \to M$ uma curva (suave) ligando p a q. Mostre que se pode definir uma orientação de cada $T_{\gamma(t)}M$ de maneira a que "varie suavemente em t" (parte do exercício consiste em dar significado preciso a esta frase). Portanto uma orientação em T_pM pode ser transportada para T_qM ao longo da curva γ.

(b) Mostre que, se M é simplesmente conexa, então a orientação de T_qM é independente de γ. Conclua que qualquer variedade simplesmente conexa é orientável.

(2) Seja M uma variedade de dimensão n e seja W o conjunto

$$\{(p,\mu) \mid p \in M \ , \ \mu \in \wedge^n T_p^* M \setminus \{0\}\} \ .$$

Introduza em W a seguinte relação de equivalência:

$$(p,\mu_1) \sim (p,\mu_2) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } \mu_2 = \lambda \mu_1 \ .$$

Seja X o conjunto das classes de equivalência.

(a) Mostre que X é uma variedade de dimensão n e mostre que a projecção de W para M que leva (p,μ) para p preserva as classes de equivalência e assim dá origem a uma aplicação

$$\pi : X \longrightarrow M \ .$$

(b) Mostre que cada ponto de M tem exactamente duas pré-imagens em X por π. Mostre que π é suave e que, se $x \in X$ e $p = \pi(x)$, então π leva uma vizinhança de x difeomorficamente para uma vizinhança de p. Uma tal aplicação chama-se uma **cobertura dupla**.

(c) Mostre que a aplicação de W para W que leva (p,μ) para $(p,-\mu)$ leva classes de equivalência para classes de equivalência e por isso induz uma aplicação

$$\sigma : X \longrightarrow X \ .$$

Mostre que σ é um difeomorfismo e que $\pi \circ \sigma = \pi$ e $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$.

(d) Suponha que M é conexa. Prove que:

$$M \text{ é orientável} \iff X \textit{ não} \text{ é conexa} \ .$$

Prove que, se M é orientável, então X tem exactamente duas componentes conexas e cada uma é levada por π difeomorficamente para M.

(e) Suponha que M não é orientável. Prove que X *é* orientável e que $\sigma : X \to X$ inverte a orientação.