

GEOMETRIA DIFERENCIAL – FICHA 9

(não é para entregar)

Variedades Simplécticas

Seja M uma variedade de dimensão $2n$. Uma **forma simpléctica** em M é uma forma-2 ω fechada e tal que a sua n -ésima potência exterior $\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_n$ é uma forma de volume.

Uma **variedade simpléctica** é um par (M, ω) onde M é uma variedade (de dimensão par) e ω é uma forma simpléctica em M .

(1) Seja X uma qualquer variedade de dimensão n e seja $M = T^*X$ o seu fibrado cotangente.

(a) Uma carta (U, x_1, \dots, x_n) para X induz uma carta $(T^*U, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ para M , onde $\xi \in T_x^*U$ é escrito $\xi = \sum \xi_i (dx_i)_x$. Defina a forma-1 α em T^*U por

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i .$$

Mostre que esta definição é independente da escolha das coordenadas, i.e. mostre que, se (U, x_1, \dots, x_n) e (U, x'_1, \dots, x'_n) são duas cartas para X com formas-1 correspondentes $\alpha = \sum \xi_i dx_i$ e $\alpha' = \sum \xi'_i dx'_i$, então em $T^*(U \cap U')$ as formas α e α' são iguais. Conclua que estas formas locais podem ser coladas para definir uma forma global α em M .

(b) Mostre que a forma-2 $\omega = -d\alpha$ é uma forma simpléctica em M ; esta forma chama-se a **forma simpléctica canónica** no fibrado cotangente T^*X . Logo, qualquer fibrado cotangente é canonicamente uma variedade simpléctica.

(c) Seja $\pi : M \rightarrow X, (x, \xi) \mapsto x$, a projecção do fibrado cotangente para a base. Mostre que, num ponto $p = (x, \xi)$ de M , a forma-1 α tem a seguinte descrição *invariante*, ou seja, independente de coordenadas,

$$\alpha_p = (d\pi_p)^* \xi = \xi \circ d\pi_p \in T_p^*M .$$

A forma α chama-se a **forma-1 tautológica** no fibrado cotangente T^*X .

(2) Seja (M, ω) uma variedade simpléctica.

(a) Mostre que, se M é compacta, então $[\omega^k] \neq 0$ em $H_{\text{deRham}}^{2k}(M)$, para qualquer $k = 1, \dots, n$.

Sugestão: Teorema de Stokes.

(b) Um campo vectorial v em M diz-se **hamiltoniano** se a forma $\iota(v)\omega$ é exacta; uma função $h \in C^\infty(M)$ tal que $\iota(v)\omega = dh$ chama-se então uma **função hamiltoniana** para v .

Mostre que qualquer função $h \in C^\infty(M)$ é uma função hamiltoniana para algum v .

Sugestão: Mostre que as aplicações $\tilde{\omega}_p : T_p M \rightarrow T_p^* M, v_p \mapsto \iota(v_p)\omega_p$, são bijectivas.

(c) Um campo vectorial v em M diz-se **simpléctico** se a forma $\iota(v)\omega$ é fechada.

Suponha que v é um campo vectorial completo em M e seja $\{\exp tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ o grupo (a um parâmetro) de difeomorfismos de M gerado por v . Mostre que v é um campo vectorial simpléctico se e só se o fluxo de v preserva ω , i.e.

$$(\exp tv)^* \omega = \omega , \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Sugestão: Fórmula mágica de Cartan.

(d) Dê um exemplo de uma variedade simpléctica compacta de dimensão 2 com um campo vectorial simpléctico que não é hamiltoniano.