**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

GEOMETRIA I – LMAC

EXAME 1 – 5 DE JULHO DE 2002

**apresente e justifique todos os cálculos**

cotação: 2 valores por questão, duração: 3 horas (9:00-12:00)

(1) Calcule a inversa da seguinte aplicação afim bijectiva

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \end{array} .$$

Quais são as aplicações lineares associadas a $\varphi$ e a $\varphi^{-1}$?

(2) Quais são as isometrias positivas do plano euclidiano que são involuções?

(3) Determine os lados de um triângulo conhecendo o seu perímetro $P$ e os seus ângulos internos $A$, $B$ e $C$.

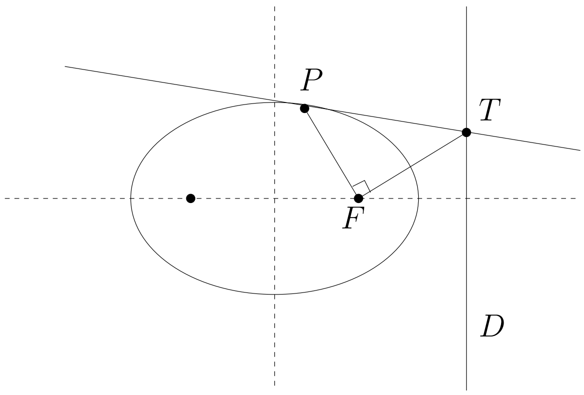
(4) O que é a composição de três reflexões ortogonais relativas a planos paralelos de um espaço euclidiano tridimensional?

(5) Justifique que não pode existir sobre nenhuma esfera um triângulo esférico equilátero com ângulos internos de medida $\frac{\pi}{4}$ cada.

(6) Seja $i$ a inversão relativa à circunferência unitária centrada na origem. Determine a imagem por $i$ das seguintes curvas (furadas na origem quando apropriado):
(a) a recta $4x - 4y = 1$;
(b) a circunferência de centro $(3, -4)$ e raio $5$.

(7) Determine o ponto de $\mathbb{RP}^2$ onde a recta através de $[1,2,-3]$ e $[2,-1,0]$ intersecta a recta que passa em $[1,0,-1]$ e $[1,1,1]$.

(8) Seja $P=(a\cos t, b\sin t)$, com $\sin t \neq 0$, um ponto sobre a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, onde $a>b>0$ e $b^2=a^2(1-e^2)$, com $0<e<1$, seja $T$ o ponto de intersecção da recta tangente à elipse em $P$ com a directriz $D$ de equação $x=\frac{a}{e}$ e seja $F=(ae,0)$ um dos focos. Prove que $PF$ é perpendicular a $TF$.
(A recta tangente à elipse no ponto $(x_0,y_0)$ tem equação cartesiana $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.)




(9) Determine os pontos regulares e escreva uma equação cartesiana do plano tangente em cada ponto regular da superfície com descrição paramétrica

$$\begin{cases} x = u+v \\ y = uv \\ z = u^3+v^3 \end{cases} \qquad (u,v)\in\mathbb{R}^2 .$$

(10) Sejam $\mathbf{u}=(t,x)$ e $\mathbf{v}=(s,y)$ vectores de tipo tempo num espaço de Minkowski com $t,s>0$. Prove a seguinte desigualdade triangular para a norma de Minkowski:

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \geq |\mathbf{u}|+|\mathbf{v}| .$$

Revisão de provas: 4ª feira, 10 de Julho, 13h-14h, sala P12

**Soluções abreviadas:**

(1) Como

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

a aplicação inversa é

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 14 \end{bmatrix} . \end{array}$$

A aplicação linear associada a $\varphi$ é dada pela matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e a aplicação linear associada a $\varphi^{-1}$ é dada por $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

(2) As isometrias positivas do plano euclidiano são as rotações (em torno de qualquer ponto do plano) e as translações. Uma translação não trivial nunca é uma involução (i.e., inversa de si própria). Uma rotação de ângulo $\theta$ no sentido positivo em torno de um dado ponto é uma involução se e só se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (mod $2\pi$). Logo, as isometrias positivas do plano euclidiano que são involuções são a identidade e as rotações por ângulo $\pi$ em torno de qualquer ponto do plano.

(3) Sejam $a$, $b$ e $c$ os comprimentos dos lados opostos aos vértices de ângulo $A$, $B$ e $C$. Assume-se que nenhum dos três ângulos é zero (o caso degenerado é trivial). Pela lei dos senos, pode-se exprimir $b$ e $c$ em termos de $a$ e dos ângulos. Substituindo na fórmula do perímetro obtém-se:

$$P = a + b + c = a\left(1 + \frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin C}{\sin A}\right) \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{P}{1 + \frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin C}{\sin A}} ,$$

pelo que

$$b = \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \frac{P}{1 + \frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin C}{\sin A}} = \frac{P \sin B}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

e, analogamente,

$$c = \frac{P \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} .$$

(4) Para descrever em coordenadas a composição de três reflexões relativas a planos paralelos, escolha-se um referencial afim onde os três planos são paralelos ao plano $xy$, pelo que são então descritos por equações $z = a$, $z = b$ e $z = c$. O resultado de reflectir em relação ao plano $z = c$ após reflectir em relação ao plano $z = b$ é uma translação pelo vector $(0, 0, 2c - 2b)$. Essa translação após uma reflexão relativamente ao plano $z = a$ escreve-se nestas coordenadas como:

$$(x, y, z) \longmapsto (x, y, 2c - 2b + 2a - z) .$$

Daqui se vê que essa composição é uma reflexão relativa ao plano $z = c - b + a$.

(5) Sobre uma esfera de raio $R$, a área de um triângulo com ângulos internos $\theta_1$, $\theta_2$ e $\theta_3$ é $R^2(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi)$. Sendo a área sempre não negativa, qualquer triângulo esférico tem $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \geq \pi$. Como $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \pi$, não pode existir um tal triângulo.

**Continuação das soluções abreviadas:**

(6) Uma vez que $i$ é uma involução e é dada em coordenadas por $i(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ para $(x,y) \neq (0,0)$, obtêm-se as seguintes equações:

(a)

$$\frac{4x}{x^2+y^2} - \frac{4y}{x^2+y^2} = 1 \iff 4x - 4y = x^2 + y^2 \iff (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8 \ ,$$

que representa uma circunferência que passa na origem, com centro $(2,-2)$ e raio $\sqrt{8}$, pelo que a imagem será esta circunferência furada na origem;

(b)

$$\begin{array}{rl} & \left(\frac{x}{x^2+y^2} - 3\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + 4\right)^2 = 25 \\ \iff & \left(x - 3(x^2+y^2)\right)^2 + \left(y + 4(x^2+y^2)\right)^2 = 25(x^2+y^2)^2 \\ \iff & \ldots \iff 6x - 8y = 1 \ , \end{array}$$

que é a equação de uma recta que não passa na origem.

(7) A recta projectiva através de $[1,2,-3]$ e $[2,-1,0]$ é dada pela equação $3x+6y+5z=0$, enquanto que a recta projectiva através de $[1,0,-1]$ e $[1,1,1]$ é dada por $x-2y+z=0$. A intersecção destas duas rectas é descrita, por exemplo, pelas equações $x = 8y$ e $z = -6y$, pelo que o ponto pedido é o $[8,1,-6]$.

(8) Sendo determinado pela conjunção das equações $\frac{x\cos t}{a} + \frac{y \sin t}{b} = 1$ e $x = \frac{a}{e}$, o ponto $T$ tem coordenadas $(\frac{a}{e}, \frac{b}{\sin t}(1 - \frac{\cos t}{e}))$. As rectas $PF$ e $TF$ são dirigidas pelos vectores $\overrightarrow{FP} = (a\cos t, b\sin t) - (ae, 0) = (a\cos t - ae, b\sin t)$ e $\overrightarrow{FT} = (\frac{a}{e}, \frac{b}{\sin t}(1 - \frac{\cos t}{e})) - (ae, 0) = (\frac{a}{e} - ae, \frac{b}{\sin t}(1 - \frac{\cos t}{e}))$, respectivamente, cujo produto interno é

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FT} & = & (a\cos t - ae)(\frac{a}{e} - ae) + (b \sin t)\frac{b}{\sin t}(1 - \frac{\cos t}{e}) \\ & = & a^2(\cos t - e)(\frac{1}{e} - e) + a^2(1-e^2)(1 - \frac{\cos t}{e}) \ = \ 0 \ , \end{array}$$

pelo que as rectas são perpendiculares.

(9) Considera-se a parametrização $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(u,v) = (u+v, uv, u^3+v^3)$. Os vectores $\frac{\partial f}{\partial u} = (1, v, 3u^2)$ e $\frac{\partial f}{\partial v} = (1, u, 3v^2)$ são linearmente independentes se e só se $(v, 3u^2)$ e $(u, 3v^2)$ são independentes, o que acontece se e só se $u \neq v$. Assim, os pontos regulares são aqueles para os quais os parâmetros $u$ e $v$ são diferentes. Nesses pontos, obtém-se um vector normal à superfície pela fórmula

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & v & 3u^2 \\ 1 & u & 3v^2 \end{vmatrix} = (3v^3 - 3u^3, 3u^2 - 3v^2, u - v) \ .$$

Para escrever uma equação cartesiana do plano tangente no ponto $f(u,v)$, usa-se as coordenadas do vector $\mathbf{n}(u,v)$ como coeficientes e determina-se o segundo membro de maneira a que o ponto $f(u,v)$ pertença ao plano:

$$(3v^3 - 3u^3)x + (3u^2 - 3v^2)y + (u-v)z = (v^2 - u^2)(2u^2 + 2v^2 + uv) \ .$$

(10) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são de tipo tempo com $t, s > 0$, então $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é de tipo tempo e $|\mathbf{u}| = \sqrt{c^2t^2 - x^2}$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{c^2s^2 - y^2}$ e $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{c^2(t+s)^2 - (x+y)^2}$. Uma vez que $|x| \leq ct$ e $|y| \leq cs$, tem-se que $xy \leq |xy| \leq c^2ts$. Portanto,

$$\begin{array}{rl} & |\mathbf{u}+\mathbf{v}| \geq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \iff |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 \geq |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \\ \iff & c^2(t+s)^2 - (x+y)^2 \geq c^2t^2 - x^2 + c^2s^2 - y^2 + 2\sqrt{(c^2t^2 - x^2)(c^2s^2 - y^2)} \\ \iff & 2c^2ts - 2xy \geq 2\sqrt{(c^2t^2 - x^2)(c^2s^2 - y^2)} \\ \iff & (c^2ts - xy)^2 \geq (c^2t^2 - x^2)(c^2s^2 - y^2) \iff t^2y^2 + s^2x^2 \geq tsxy \ , \end{array}$$

o que é verdade pois, de $(ty \pm sx)^2 \geq 0$, deduz-se que $t^2y^2 + s^2x^2 \geq 2|tsxy| \geq |tsxy| \geq tsxy$.