

GEOMETRIA I – LMAC

EXAME 2 – 19 DE JULHO DE 2002

apresente e justifique todos os cálculos

cotação: 2 valores por questão, duração: 3 horas (13:00-16:00)

- (1) Quais das seguintes propriedades é que são afins (i.e., preservadas por aplicações afins)?
- (a) distância;
 - (b) colinearidade;
 - (c) medida de um ângulo;
 - (d) ser ponto médio de um segmento de recta.

- (2) Calcule a aplicação afim $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que leva os pontos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para os pontos

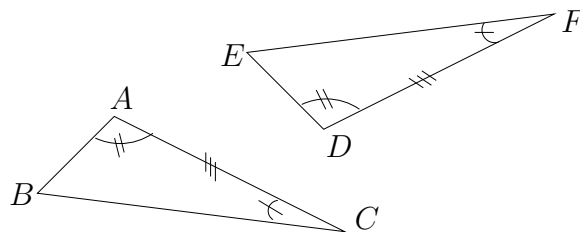
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

e verifique se se trata de uma isometria.

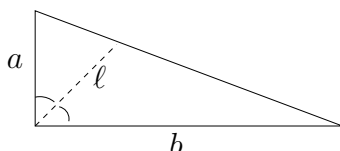
- (3) Usando uma isometria, prove que se os triângulos ABC e DEF têm

$$|AC| = |DF|, \angle BAC = \angle EDF \text{ e } \angle ACB = \angle DFE,$$

então $|BC| = |EF|$, $|AB| = |DE|$ e $\angle ABC = \angle DEF$.



- (4) Um triângulo rectângulo tem catetos de comprimentos a e b . Calcule, em função de a e b , o comprimento ℓ do segmento da bissetriz do ângulo recto entre o vértice e a hipotenusa.



- (5) Esboce três d-rectas L_1 , L_2 e L_3 com as seguintes propriedades: L_1 e L_3 são paralelas, L_2 intersecta L_1 e L_3 e os ângulos entre L_2 e L_1 e entre L_2 e L_3 não são iguais. Explique porque é que um fenómeno destes não pode ocorrer entre rectas de um plano euclidiano.
- (6) Determine se os seguintes pontos do plano projectivo são colineares:

$$[2, 1, 3], \quad [1, 2, 1] \quad \text{e} \quad [-1, 4, -3].$$

- (7) Considere a parábola $y^2 = 4ax$ ($a > 0$) com descrição paramétrica $x = at^2$ e $y = 2at$. Sejam P e Q dois pontos sobre a parábola correspondentes aos valores do parâmetro t_1 e t_2 , respectivamente, com $t_1 \neq t_2$ não nulos.
- (a) Se o triângulo PQO for rectângulo na origem O , prove que $t_1 \cdot t_2 = -4$.
- (b) Se $t_1 = 2$ e PQ é perpendicular a OP , prove que $t_2 = -4$.

- (8) Escreva uma equação cartesiana de uma superfície S contendo a superfície com a seguinte descrição paramétrica:

$$x = u + v + w, \quad y = u^2 + v^2 + w^2, \quad z = u^3 + v^3 + w^3,$$

com $uvw = 1, \quad (u, v, w) \in \mathbb{R}^3.$

- (9) Mostre que é uma circunferência a curva em \mathbb{R}^3 determinada pelas equações

$$\begin{cases} z^2 - z = xy \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

- (10) Seja S a esfera unitária centrada na origem em \mathbb{R}^3 , seja $f : S \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projecção estereográfica a partir do pólo norte $N = (0, 0, 1)$ para o plano $z = 0$, e seja C uma curva em S . Mostre que C é uma circunferência que passa (respectivamente, não passa) no pólo N se e só se $f(C \setminus \{N\})$ é uma recta (respectivamente, é uma circunferência). Sugestão: Calcule a aplicação inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \setminus \{N\}$.

Soluções abreviadas:

- (1) Colinearidade é uma propriedade afim: a imagem por uma aplicação afim de uma recta que passa por dois pontos dados é a recta que passa pelos pontos imagem.

Ser o ponto médio de um segmento de recta é uma propriedade afim: se $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é uma aplicação afim e $M = P_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}$ é o ponto médio do segmento de extremos P_1 e P_2 , então $\varphi(M) = \varphi(P_1) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ é o ponto médio do segmento imagem $\varphi(P_1P_2)$.

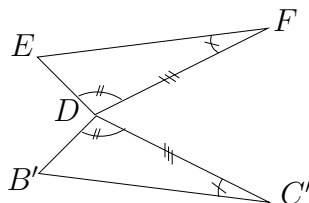
Distância e medida de um ângulo *não* são propriedades afins: por exemplo, a projecção $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = x$, não preserva distâncias nem ângulos.

- (2) Relativamente à base canónica φ escreve-se

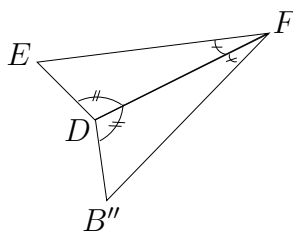
$$\varphi : \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz 3×3 acima é ortogonal, φ é uma isometria.

- (3) Constrói-se a isometria por etapas. Com uma translação por \overrightarrow{AD} do triângulo ABC a imagem do vértice A coincide com o ponto D . Sejam B' e C' as imagens de B e C , respectivamente.

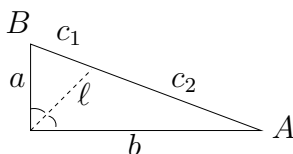


Por uma rotação do triângulo $DB'C'$ em torno do ponto D , leva-se o lado DC' a coincidir com o lado DF (estes dois lados têm o mesmo comprimento pela hipótese $|AC| = |DF|$ e por uma translação ser uma isometria). Seja B'' a imagem de B' .



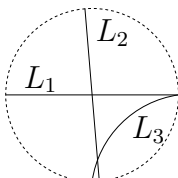
Como $\angle FDB'' = \angle DEF$, e $\angle DFB'' = \angle DFE$, ou $B'' = E$, ou uma reflexão ortogonal de DFB'' relativamente a DF leva B'' para E . A isometria que transforma ABC em DEF , e portanto demonstra as igualdades pedidas, é a composição das 2-3 isometrias descritas.

- (4) Sejam c_1 e c_2 os comprimentos dos dois segmentos da hipotenusa c que fecham os triângulos de lados a , ℓ e b , ℓ , respectivamente. Pela lei dos senos aplicada a cada um dos dois triângulos mais pequenos, $\frac{\ell}{\sin B} = \frac{c_1}{\sin \frac{\pi}{4}}$ e $\frac{\ell}{\sin A} = \frac{c_2}{\sin \frac{\pi}{4}}$, onde A e B são os ângulos opostos aos lados a e b . Pela definição de seno, $\sin B = \frac{b}{c}$ e $\sin A = \frac{a}{c}$. Somando as duas relações dadas pela lei dos senos, $\ell \left(\frac{c}{b} + \frac{c}{a} \right) = \frac{c}{\sqrt{2}}$, ou seja, $\ell = \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.



Continuação das soluções abreviadas:

- (5) Por exemplo, sejam L_1 , L_2 e L_3 como na figura seguinte, onde o ângulo da intersecção de L_2 com L_3 é quase nulo e o ângulo da intersecção de L_2 com L_1 é quase recto.



Num plano euclidiano, são forçosamente iguais os ângulos da intersecção de uma recta L_2 com cada uma de duas rectas paralelas L_1 e L_3 (como pode ser visto pela translação ao longo de L_2 que leva L_1 para L_3).

- (6) Como $(2, 1, 3) \times (1, 2, 1) = (-5, 1, 3)$, a recta projectiva que passa em $[2, 1, 3]$ e $[1, 2, 1]$ tem equação $-5x + y + 3z = 0$. Ora o ponto $[-1, 4, -3]$ satisfaz esta equação, logo pertence à recta, logo os três pontos são colineares. Equivalentemente, como é nulo o determinante da matriz cujas linhas são $(2, 1, 3)$, $(1, 2, 1)$ e $(-1, 4, -3)$, as três rectas radiais definidas por estes três vectores são coplanares, logo os três pontos projectivos correspondentes são colineares.
- (7) (a) A ortogonalidade de $OP = (at_1^2, 2at_1)$ e $OQ = (at_2^2, 2at_2)$ traduz-se, pelo produto interno, na equação $a^2t_1^2t_2^2 + 4a^2t_1t_2 = 0$. Uma vez que $a \neq 0$, $t_1 \neq 0$ e $t_2 \neq 0$, conclui-se que $t_1t_2 + 4 = 0$.
- (b) A ortogonalidade de $PQ = (a(t_2^2 - t_1^2), 2a(t_2 - t_1))$ e $OP = (at_1^2, 2at_1)$ traduz-se na equação $a(t_2^2 - t_1^2)at_1^2 + 2a(t_2 - t_1)2at_1 = 0$. Uma vez que $a \neq 0$, $t_1 \neq t_2$ e $t_1 = 2$, obtém-se que $16 + 4t_2 = 0$.

- (8) Como

$$\begin{aligned} x^3 &= u^3 + v^3 + w^3 + 3u^2v + 3u^2w + 3v^2u + 3v^2w + 3w^2u + 3w^2v + 6uvw \\ &= -2\underbrace{(u^3 + v^3 + w^3)}_z + 3\underbrace{(u + v + w)}_x \underbrace{(u^2 + v^2 + w^2)}_y + 6\underbrace{uvw}_1, \end{aligned}$$

obtém-se a equação cartesiana $x^3 + 2z - 3xy - 6 = 0$.

- (9) Da segunda equação obtém-se que $(x + y)^2 = (1 - z)^2$, ou seja, que $2xy = z^2 - x^2 - y^2 + 1 - 2z$. Substituindo na primeira equação, obtém-se o seguinte sistema equivalente ao dado:

$$\begin{cases} 2z^2 - 2z = z^2 - x^2 - y^2 + 1 - 2z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

A intersecção de uma esfera e um plano, quando contém pelo menos dois pontos, é uma circunferência. Ora a intersecção acima contém $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$, por exemplo.

- (10) Seja $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. A imagem $f^{-1}(u, v)$ é o ponto de intersecção da esfera furada $S \setminus \{N\}$ com a recta através de $(0, 0, 1)$ e $(u, v, 0)$. Essa recta é o conjunto $\{(0, 0, 1) + \lambda(u, v, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Para $\lambda \neq 0$ (para evitar o pólo norte) tem-se

$$(\lambda u)^2 + (\lambda v)^2 + (1 - \lambda)^2 = 1 \iff \lambda^2(u^2 + v^2 + 1) - 2\lambda = 0 \iff \lambda = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Portanto, a aplicação inversa é

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S \setminus \{N\} \\ (u, v) &\longmapsto \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Uma circunferência em S é a intersecção de S com um plano $ax + by + cz + d = 0$. Substituindo (x, y, z) por $f^{-1}(u, v)$, obtém-se

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} + b \cdot \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} + c \cdot \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} + d &= 0 \\ \iff 2au + 2bv + c(u^2 + v^2 - 1) + d(u^2 + v^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

A equação acima é a equação de uma recta $2au + 2bv - c + d = 0$ se e só se $c + d = 0$, ou seja se e só se o plano acima contém o pólo N . A equação acima é a equação de uma circunferência $\left(u + \frac{a}{c+d}\right)^2 + \left(v + \frac{b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}{(c+d)^2}$ se e só se $c + d \neq 0$, ou seja se e só se o plano acima não contém o pólo N .