Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 6/3/2002

GEOMETRIA I – LMAC

FICHA 1 – GEOMETRIA AFIM

para entregar até à aula teórica de **4ª feira, 20 de Março**

Os exercícios seguintes usam notações explicadas no capítulo I das notas sobre Geometrias Elementares. Um exercício cujo enunciado é uma afirmação consiste em verificar essa afirmação.

(1) As diagonais de um paralelogramo intersectam-se no seu ponto médio, ou seja, se $AA'BB'$ é um paralelogramo e o ponto C satisfaz $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AC}$, então C também satisfaz $\overrightarrow{A'B} = 2\overrightarrow{A'C}$.

(2) Sejam $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre $\mathcal{V}$ e $\mathcal{B}$ um subespaço afim de $\mathcal{A}$.
   (a) Existe um subespaço vectorial $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ tal que para qualquer ponto $B \in \mathcal{B}$ tem-se $\alpha_B(\mathcal{B}) = \mathcal{W}$.
   (b) O subespaço afim $\mathcal{B}$ é um espaço afim sobre $\mathcal{W}$.

(3) Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vectoriais, e seja $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Para todo o vector $\mathbf{w}$ na imagem de f, a sua imagem inversa, $f^{-1}(\mathbf{w})$, é um subespaço afim de $\mathcal{V}$ (onde se considera em $\mathcal{V}$ a sua estrutura natural de espaço afim) com direcção dada pelo núcleo de f.

Sugestão: Para $\mathbf{v} \in f^{-1}(\mathbf{w})$, por definição tem-se $\alpha_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

(4) Por dois pontos (distintos) de um espaço afim passa uma e uma só recta.

(6) (a) Um subconjunto $\mathcal{D}$ de um espaço afim $\mathcal{A}$ é um subespaço afim se e só se para todos os pontos $B, C \in \mathcal{D}$ se tem a inclusão $\langle B, C\rangle \subseteq \mathcal{D}$.
   (b) Quando é que a união de dois subespaços afins é um subespaço afim?

(7) Num plano, duas rectas que não se intersectam são forçosamente paralelas.

(9) Se $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são dois espaços vectoriais munidos das suas estruturas afins naturais, uma aplicação $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é afim se e só se existe um vector $\mathbf{b} \in \mathcal{W}$ e uma aplicação linear $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ tal que $\varphi(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + \mathbf{b}$, $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$.

(10) Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ uma aplicação afim, e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ um subespaço afim com a direcção $\mathcal{W}$ passando por um ponto $B \in \mathcal{B}$. A imagem $\varphi(\mathcal{B})$ é o subespaço afim com a direcção $\overrightarrow{\varphi}(\mathcal{W})$ passando pelo ponto $\varphi(B) \in \mathcal{C}$.

(11) Quando não é vazia, a imagem inversa de um subespaço afim por uma aplicação afim é um subespaço afim.

Sugestão: A imagem inversa de um subespaço vectorial por uma aplicação linear é um subespaço vectorial.

(12) Uma aplicação afim é determinada pela imagem de um referencial afim.