

GEOMETRIA I – LMAC

(PROPOSTA DE) RESOLUÇÃO DA FICHA 1

disponível em <http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/GI>

- (1) As diagonais de um paralelogramo intersectam-se no seu ponto médio, ou seja, se  $AA'BB'$  é um paralelogramo e o ponto  $C$  satisfaz  $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AC}$ , então  $C$  também satisfaz  $\overrightarrow{A'B} = 2\overrightarrow{A'C}$ .

**Resolução:** A relação triangular, a definição de paralelogramo ( $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$  e  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ ) e a hipótese quanto ao ponto  $C$  ( $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AC}$ ) justificam os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B} &= \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B} \\ &= \overrightarrow{A'A} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A'A} = 2(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{A'C}. \end{aligned}$$

□

- (2) Sejam  $\mathcal{A}$  um espaço afim sobre  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{B}$  um subespaço afim de  $\mathcal{A}$ .
- (a) Existe um subespaço vectorial  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{V}$  tal que para qualquer ponto  $B \in \mathcal{B}$  tem-se  $\alpha_B(\mathcal{B}) = \mathcal{W}$ .
- (b) O subespaço afim  $\mathcal{B}$  é um espaço afim sobre  $\mathcal{W}$ .

**Resolução:**

- (a) Por definição de subespaço afim, existe um ponto  $B \in \mathcal{B}$  tal que a imagem de  $\mathcal{B}$  por  $\alpha_B$ ,

$$\mathcal{W}_B = \alpha_B(\mathcal{B}) = \{\overrightarrow{BC} \mid C \in \mathcal{B}\},$$

é um subespaço vectorial de  $\mathcal{V}$ . Seja  $B'$  um outro ponto qualquer de  $\mathcal{B}$ , com imagem de  $\mathcal{B}$  por  $\alpha_{B'}$  o conjunto

$$\mathcal{W}_{B'} = \alpha_{B'}(\mathcal{B}) = \{\overrightarrow{B'D} \mid D \in \mathcal{B}\}.$$

Há que mostrar que  $\mathcal{W}_{B'} = \mathcal{W}_B$ , ou seja, que um vector está em  $\mathcal{W}_{B'}$  se e só se está em  $\mathcal{W}_B$ . Usando a relação triangular e o facto de  $\mathcal{W}_B$  ser um subespaço vectorial, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in \mathcal{W}_{B'} &\iff \mathbf{v} = \overrightarrow{B'D}, \text{ para algum } D \in \mathcal{B} \\ &\iff \mathbf{v} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BD}, \text{ para algum } D \in \mathcal{B} \\ &\iff \mathbf{v} = -\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BD}, \text{ para algum } D \in \mathcal{B} \\ &\iff \mathbf{v} = \overrightarrow{BC}, \text{ para algum } C \in \mathcal{B} \iff \mathbf{v} \in \mathcal{W}_B. \end{aligned}$$

- (b) Tome-se a aplicação  $\beta : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{W}$  definida pela restrição de  $\alpha : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$  a  $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ . Há que verificar as duas condições da definição de espaço afim.
- Qualquer que seja o ponto  $B \in \mathcal{B}$ , a aplicação  $\beta_B : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{W}$ ,  $C \mapsto \overrightarrow{BC}$  é injectiva pois  $\beta_B = \alpha_B|_{\mathcal{B}}$  e  $\alpha_B$  é injectiva, e  $\beta_B$  é sobrejectiva porque  $\mathcal{W} = \alpha_B(\mathcal{B})$  é a imagem de  $\beta_B = \alpha_B|_{\mathcal{B}}$ .
  - A relação triangular é satisfeita para  $\alpha$ , logo é satisfeita para a sua restrição  $\beta = \alpha|_{\mathcal{B} \times \mathcal{B}}$ .

□

- (3) Sejam  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$  dois espaços vectoriais, e seja  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  uma aplicação linear. Para todo o vector  $\mathbf{w}$  na imagem de  $f$ , a sua imagem inversa,  $f^{-1}(\mathbf{w})$ , é um subespaço afim de  $\mathcal{V}$  (onde se considera em  $\mathcal{V}$  a sua estrutura natural de espaço afim) com direcção dada pelo núcleo de  $f$ .

**Resolução:** Seja  $\mathcal{B} = f^{-1}(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$ . O núcleo,  $\ker f$ , da aplicação linear  $f$  é um subespaço vectorial de  $\mathcal{V}$ . Há que verificar, para um  $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{B}$  (i.e.,  $f(\mathbf{v}_0) = \mathbf{w}$ ) se tem a igualdade  $\alpha_{\mathbf{v}_0}(\mathcal{B}) = \ker f$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{v}_0}(\mathcal{B}) &= \{\alpha_{\mathbf{v}_0}(\mathbf{u}) \in \mathcal{V} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{B}\} \\ &= \{\mathbf{u} - \mathbf{v}_0 \in \mathcal{V} \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{w}\} \\ &= \{\mathbf{u} - \mathbf{v}_0 \in \mathcal{V} \mid f(\mathbf{u} - \mathbf{v}_0) = 0\} \\ &= \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid f(\mathbf{v}) = 0\} = \ker f. \end{aligned}$$

□

- (4) Por dois pontos (distintos) de um espaço afim passa uma e uma só recta.

**Resolução:** Existência. Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos de um espaço afim  $\mathcal{A}$ . O conjunto

$$\mathcal{R} = \{C \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

contém  $A$  e  $B$  (correspondem a tomar  $\lambda = 0$  e  $\lambda = 1$ , respectivamente) e é uma recta pois  $\alpha_A(\mathcal{R}) = \{\lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  é um subespaço vectorial de dimensão 1.

Unicidade. Se  $\mathcal{R}'$  é uma recta que passa em  $A$  e em  $B$ , pontos distintos, então a sua direcção contém  $\alpha_A(\mathcal{R}') = \overrightarrow{AB}$ , pelo que tem que ser igual ao subespaço unidimensional gerado por este vector,  $\langle \overrightarrow{AB} \rangle$ . Aplicando  $\alpha_A^{-1}$  a  $\langle \overrightarrow{AB} \rangle$ , obtém-se que  $\mathcal{R}' = \{C \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathcal{R}$ . (Equivalentemente, basta observar que dado um ponto  $A$  e uma direcção  $\{\lambda \overrightarrow{AB} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ , existe um único subespaço afim contendo esse ponto e com essa direcção.) □

- (6) (a) Um subconjunto  $\mathcal{D}$  de um espaço afim  $\mathcal{A}$  é um subespaço afim se e só se para todos os pontos  $B, C \in \mathcal{D}$  se tem a inclusão  $\langle B, C \rangle \subseteq \mathcal{D}$ .  
 (b) Quando é que a união de dois subespaços afins é um subespaço afim?

**Resolução:**

- (a) Se  $\mathcal{D}$  é um subespaço afim, então para todos os pontos  $B, C \in \mathcal{D}$  o vector  $\overrightarrow{BC}$  está na sua direcção, pelo que todos os seus múltiplos  $\lambda \overrightarrow{BC}$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$ , também, pelo que o subespaço  $\langle B, C \rangle = \{D \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BC}, \lambda \in \mathbb{R}\}$  está contido em  $\mathcal{D}$ . Reciprocamente, se  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$  é um subconjunto satisfazendo  $\langle B, C \rangle \subseteq \mathcal{D}, \forall B, C \in \mathcal{D}$ , então deve-se verificar que, para  $B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$  um ponto fixo, a imagem

$$\mathcal{W} = \alpha_B(\mathcal{D}) = \{\overrightarrow{BC} \mid C \in \mathcal{D}\}$$

é um subespaço vectorial:

- Fecho para o produto por escalares. Sejam  $\overrightarrow{BC} \in \mathcal{W}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Como

$$\langle B, C \rangle = \{D \in \mathcal{A} \mid \overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BC}, \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{D},$$

conclui-se que  $\lambda \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \in \mathcal{W}$ .

- Fecho para a adição de vectores. Sejam  $\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{BC_2} \in \mathcal{W}$ , i.e.,  $C_1, C_2 \in \mathcal{D}$ . Então  $\langle C_1, C_2 \rangle \subseteq \mathcal{D}$ , pelo que pertence a  $\mathcal{D}$  o ponto  $C$  desta recta definido

por  $\overrightarrow{C_1C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2}$ . Então  $\langle B, C \rangle \subseteq \mathcal{D}$ , pelo que pertence a  $\mathcal{D}$  o ponto  $D$  desta recta definido por  $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ . Ora,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{BC_2} &= \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{C_1C_2} = 2\overrightarrow{BC_1} + 2\overrightarrow{C_1C} \\ &= 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \in \mathcal{W}. \end{aligned}$$

(Desenhando o paralelogramo determinado pelos vectores  $\overrightarrow{BC_1}$  e  $\overrightarrow{BC_2}$  a partir de  $B$ , fica clara a escolha de pontos  $C$  e  $D$ : o centro e o vértice oposto a  $B$ .)

- (b) A união de dois subespaços vectoriais é um subespaço vectorial se e só se um deles está contido no outro. Vai-se mostrar que a união de dois subespaços afins é um subespaço afim se e só se um deles está contido no outro. Num sentido é claro: se  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  são subespaços afins com  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ , então a sua união é  $\mathcal{C}$ , que é subespaço afim. Reciprocamente, sejam  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  dois subespaços afins de  $\mathcal{A}$  com direcções  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{W}$ , tais que a sua união  $\mathcal{D} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  é um subespaço afim. Escolham-se pontos  $B \in \mathcal{B}$  e  $C \in \mathcal{C}$ . A recta  $\langle B, C \rangle$  (contida em  $\mathcal{D}$  pela alínea (a)) tem que estar contida em  $\mathcal{B}$  ou em  $\mathcal{C}$ , porque pelo menos um destes subespaços contém dois pontos da recta, e logo toda a recta (alínea (a)). Sem perda de generalidade, é  $B \in \mathcal{C}$ . Como  $\mathcal{D}$  é subespaço afim,  $\alpha_B(\mathcal{D})$  é um subespaço vectorial. Mas

$$\alpha_B(\mathcal{D}) = \alpha_B(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = \alpha_B(\mathcal{B}) \cup \alpha_B(\mathcal{C}) = \mathcal{U} \cup \mathcal{W},$$

o que é subespaço vectorial se e só se  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$  ou  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ . No caso  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$ , verifica-se que então  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ , e no outro caso, verifica-se que  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ . □

- (7) Num plano, duas rectas que não se intersectam são forçosamente paralelas.

**Resolução:** Mostra-se que duas rectas não paralelas num plano, têm que se intersectar. Sejam  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  duas rectas com direcções  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{U}'$  e seja  $\mathcal{V}$  a direcção do plano. Se  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  não são paralelas (i.e.,  $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}'$ ), então  $\mathcal{U} + \mathcal{U}' = \mathcal{V}$ , pois dois vectores não nulos que não sejam proporcionais um ao outro formam necessariamente uma base do plano. Escolham-se pontos  $A \in \mathcal{R}$  e  $A' \in \mathcal{R}'$ . O vector  $\overrightarrow{AA'} \in \mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{U}'$  pode ser escrito como  $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{u} - \mathbf{u}'$  com  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  e  $\mathbf{u}' \in \mathcal{U}'$ . Então  $\mathbf{u}$  é da forma  $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$  para algum  $B \in \mathcal{R}$ , pelo que  $\mathbf{u}' = -\overrightarrow{AA'} + \mathbf{u} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B} \in \mathcal{U}'$ , o que mostra que o ponto  $B$  também está na recta  $\mathcal{R}'$ . Conclui-se que  $B \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}'$ . □

- (9) Se  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$  são dois espaços vectoriais munidos das suas estruturas afins naturais, uma aplicação  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  é afim se e só se existe um vector  $\mathbf{b} \in \mathcal{W}$  e uma aplicação linear  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  tal que  $\varphi(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + \mathbf{b}$ ,  $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ .

**Resolução:** Se a aplicação  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  é da forma  $\varphi(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + \mathbf{b}$ , onde  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  é linear e  $\mathbf{b} \in \mathcal{W}$  é um vector fixo, então a aplicação  $\varphi$  é afim com aplicação linear associada  $\overrightarrow{\varphi} = f$ , uma vez que

$$\overrightarrow{\varphi(\mathbf{v})\varphi(\mathbf{u})} = \varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v}) = (f(\mathbf{u}) + \mathbf{b}) - (f(\mathbf{v}) + \mathbf{b}) = f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = f(\overrightarrow{\mathbf{v}\mathbf{u}}), \forall \mathbf{v}, \mathbf{u}.$$

Reciprocamente, se  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  é uma aplicação afim, então existe uma aplicação linear  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  tal que

$$\underbrace{\overrightarrow{\varphi(\mathbf{v})\varphi(\mathbf{u})}}_{\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v})} = f(\underbrace{\overrightarrow{\mathbf{v}\mathbf{u}}}_{\mathbf{u} - \mathbf{v}}).$$

Tomando  $\mathbf{v} = 0$ , o vector zero, e chamando  $\mathbf{b} = \varphi(0)$  à sua imagem, obtém-se que  $\varphi(\mathbf{u}) - \mathbf{b} = f(\mathbf{u})$ ,  $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ . □

- (10) Seja  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  uma aplicação afim, e  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  um subespaço afim com a direcção  $\mathcal{W}$  passando por um ponto  $B \in \mathcal{B}$ . A imagem  $\varphi(\mathcal{B})$  é o subespaço afim com a direcção  $\overrightarrow{\varphi}(\mathcal{W})$  passando pelo ponto  $\varphi(B) \in \mathcal{C}$ .

**Resolução:** Por definição de direcção de um subespaço afim, tem-se  $\mathcal{W} = \alpha_B(\mathcal{B})$ . A imagem de um subespaço vectorial por uma aplicação linear é um subespaço vectorial, portanto  $\overrightarrow{\varphi}(\mathcal{W})$  é um subespaço vectorial. Pela comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha_B} & \mathcal{V} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \overrightarrow{\varphi} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\gamma_{\varphi(B)}} & \mathcal{U} \end{array}$$

tem-se a coincidência das imagens  $\overrightarrow{\varphi}(\alpha_B(\mathcal{B})) = \gamma_{\varphi(B)}(\varphi(\mathcal{B}))$ , pelo que a imagem de  $\varphi(\mathcal{B})$  por  $\gamma_{\varphi(B)}$  é o subespaço vectorial  $\overrightarrow{\varphi}(\mathcal{W})$ , mostrando que o conjunto  $\varphi(\mathcal{B})$  é o subespaço afim com a direcção  $\overrightarrow{\varphi}(\mathcal{W})$  passando pelo ponto  $\varphi(B)$ .  $\square$

- (11) A imagem inversa de um subespaço afim por uma aplicação afim é um subespaço afim.

**Resolução:** Seja  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  uma aplicação afim, e  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$  um subespaço afim passando por um ponto  $D \in \mathcal{C}$  e com a direcção  $\mathcal{W}$  (i.e.,  $\mathcal{W} = \gamma_D(\mathcal{D})$ ). Assume-se que a imagem inversa  $\varphi^{-1}(\mathcal{D})$  não é vazia, ou seja, que  $\mathcal{D}$  contém pelo menos um ponto da imagem de  $\varphi$ . Sem perda de generalidade, esse ponto é  $D$ , que pode então ser escrito  $D = \varphi(E)$  para algum  $E \in \mathcal{A}$ . Vai-se mostrar que a imagem inversa  $\varphi^{-1}(\mathcal{D}) = \{A \in \mathcal{A} \mid \varphi(A) \in \mathcal{D}\}$  é o subespaço afim com a direcção  $\overrightarrow{\varphi}^{-1}(\mathcal{W})$  passando pelo ponto  $E$ . A imagem inversa de um subespaço vectorial por uma aplicação linear é um subespaço vectorial, portanto  $\overrightarrow{\varphi}^{-1}(\mathcal{W})$  é um subespaço vectorial. Pela comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha_E} & \mathcal{V} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \overrightarrow{\varphi} \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\gamma_D} & \mathcal{U} \end{array}$$

tem-se a coincidência dos conjuntos  $\alpha_E(\varphi^{-1}(\mathcal{D})) = \overrightarrow{\varphi}^{-1}(\mathcal{W})$ , pelo que a imagem de  $\varphi^{-1}(\mathcal{D})$  por  $\alpha_E$  é o subespaço vectorial  $\overrightarrow{\varphi}^{-1}(\mathcal{W})$ , mostrando que o conjunto  $\varphi^{-1}(\mathcal{D})$  é o subespaço afim com a direcção  $\overrightarrow{\varphi}^{-1}(\mathcal{W})$  passando pelo ponto  $E$ .  $\square$

- (12) Uma aplicação afim é determinada pela imagem de um referencial afim.

**Resolução:** Seja  $(A_0, A_1, \dots, A_n)$  um referencial afim de  $\mathcal{A}$  e seja  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  uma aplicação afim. Pela comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha_{A_0}} & \mathcal{V} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \overrightarrow{\varphi} \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\gamma_{\varphi(A_0)}} & \mathcal{W} \end{array}$$

a aplicação  $\varphi$  fica determinada pela imagem  $\varphi(A_0)$  e pela aplicação linear associada  $\overrightarrow{\varphi}$ . Ora, uma aplicação linear fica determinada pelos seus valores numa base. Logo,  $\overrightarrow{\varphi}$  é determinada pelos seus valores na base  $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$  de  $\mathcal{V}$ , que são os vectores

$$\overrightarrow{\varphi(A_0)\varphi(A_1)}, \dots, \overrightarrow{\varphi(A_0)\varphi(A_n)}.$$

Conclui-se que o conhecimento de  $\varphi(A_0), \varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n)$  determina a aplicação  $\varphi$ .  $\square$