Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 20/3/2002

GEOMETRIA I – LMAC

FICHA 2 – GEOMETRIA EUCLIDIANA

para entregar até à aula teórica de **4ª feira, 3 de Abril**

(1) Calcule a isometria $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leva os pontos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente para os pontos

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} .$$

Como é que se descreve a transformação do plano representada por φ?

(2) Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano. Mostre que G é o baricentro do sistema de massas pontuais $((A, \lambda), (B, 1 - \lambda))$ se e só se

$$\lambda|MA|^2 + (1 - \lambda)|MB|^2 = |MG|^2 + \lambda|GA|^2 + (1 - \lambda)|GB|^2 \ , \quad \forall M \in \mathcal{A} \ .$$

Sugestão: Pela relação triangular, $|MA|^2 = |MG|^2 + |GA|^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA}$ e analogamente para $|MB|^2$.

(3) Mostre que, se uma aplicação qualquer $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ de um espaço vectorial euclidiano preserva o produto interno, i.e.,

$$f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \ , \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ ,$$

então f é uma aplicação linear (e logo é uma isometria linear).

Sugestão: Expandir $||f(\lambda\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \lambda f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})||^2$.

(4) Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ subespaços vectoriais de $\mathcal{V}$ tais que $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{V}$. A *reflexão* (ou *simetria*) relativamente a $\mathcal{U}$ e ao longo de $\mathcal{W}$ é a aplicação linear $s : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ dada por $s(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} - \mathbf{w}$, para $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ e $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$.

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre $\mathcal{V}$, seja $\mathcal{B}$ um subespaço afim com direcção $\mathcal{U}$ e seja $\mathcal{W}$ outro subespaço vectorial tal que $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{V}$. Escolhendo um ponto $B \in \mathcal{B}$, define-se a **reflexão** (ou *simetria*) relativamente a $\mathcal{B}$ e ao longo de $\mathcal{W}$ como sendo a aplicação $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que satisfaz

$$\overrightarrow{B\sigma(A)} = s(\overrightarrow{BA}) \ , \quad \forall A \in \mathcal{A} \ .$$

Mostre que σ é uma aplicação afim, que σ não depende da escolha do ponto $B \in \mathcal{B}$ e que é uma *involução*, i.e., $\sigma(\sigma(A)) = A$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

(5) Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano. Uma reflexão $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ relativamente a $\mathcal{B}$ e ao longo de $\mathcal{W}$ diz-se *ortogonal* se $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{U}$, onde $\mathcal{U}$ é a direcção do subespaço afim $\mathcal{B}$. Mostre que a reflexão σ é uma isometria se e só se for uma reflexão ortogonal.