

GEOMETRIA I – LMAC

(PROPOSTA DE) RESOLUÇÃO DA FICHA 2

disponível em <http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/GI>

- (1) Calcule a isometria  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que leva os pontos

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

respectivamente para os pontos

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Como é que se descreve a transformação do plano representada por  $\varphi$ ?

**Resolução:** A isometria  $\varphi$  que leva os pontos do referencial afim  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  respectivamente para os pontos  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  e  $\mathbf{r}$  é dada em coordenadas cartesianas por  $\varphi(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$  onde  $\mathbf{b} = \mathbf{p}$  e  $A$  é a matriz real  $2 \times 2$  com colunas  $\mathbf{q} - \mathbf{p}$  e  $\mathbf{r} - \mathbf{p}$ . Neste caso fica

$$\varphi(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$

que se descreve como uma rotação de ângulo  $\frac{\pi}{3}$  no sentido positivo e centrada na origem (porque  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  e  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ) seguida de uma translação pelo vector  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ .

□

- (2) Seja  $\mathcal{A}$  um espaço euclidiano. Mostre que  $G$  é o baricentro do sistema de massas pontuais  $((A, \lambda), (B, 1 - \lambda))$  se e só se

$$\lambda|MA|^2 + (1 - \lambda)|MB|^2 = |MG|^2 + \lambda|GA|^2 + (1 - \lambda)|GB|^2, \quad \forall M \in \mathcal{A}.$$

**Resolução:** Pela relação triangular,  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$  e  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}$ . Tomando o produto interno destas expressões com elas próprias e somando com pesos  $\lambda$  e  $1 - \lambda$  obtém-se

$$\begin{aligned} \lambda \left( |MA|^2 = |MG|^2 + |GA|^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} \right), \quad \forall M \in \mathcal{A} \\ (1 - \lambda) \left( |MB|^2 = |MG|^2 + |GB|^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} \right), \quad \forall M \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

---


$$\lambda|MA|^2 + (1 - \lambda)|MB|^2 = |MG|^2 + \lambda|GA|^2 + (1 - \lambda)|GB|^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\lambda\overrightarrow{GA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{GB}), \quad \forall M \in \mathcal{A}.$$

Portanto, a expressão no enunciado é válida se e só se

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MG} \cdot (\lambda\overrightarrow{GA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{GB}) &= 0, \quad \forall M \in \mathcal{A} \\ \Leftrightarrow \lambda\overrightarrow{GA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{GB} &= 0 \\ \Leftrightarrow G \text{ é o baricentro do sistema } ((A, \lambda), (B, 1 - \lambda)). \end{aligned}$$

□

- (3) Mostre que, se uma aplicação qualquer  $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  de um espaço vectorial euclidiano preserva o produto interno, i.e.,

$$f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

então  $f$  é uma aplicação linear (e logo é uma isometria linear).

**Resolução:** A aplicação  $f$  é linear se e só se  $f(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}) - \lambda f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}) = 0$ ,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , o que acontece se e só se  $\|f(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}) - \lambda f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})\|^2 = 0$ ,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Expandindo e usando o facto de  $f$  preservar o produto interno, obtém-se

$$\begin{aligned} & \|f(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}) - \lambda f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})\|^2 \\ &= (f(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}) - \lambda f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})) \cdot (f(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}) - \lambda f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})) \\ &= \|f(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v})\|^2 + \lambda^2 \|f(\mathbf{u})\|^2 + \|f(\mathbf{v})\|^2 \\ &\quad - 2\lambda f(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot f(\mathbf{u}) - 2\lambda f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) - 2f(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot f(\mathbf{v}) \\ &= \|(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v})\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\lambda(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} - 2\lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - 2(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\ &= \|(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}) - \lambda \mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 0, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

- (4) Sejam  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{W}$  subespaços vectoriais de  $\mathcal{V}$  tais que  $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{V}$ . A *reflexão* (ou *simetria*) relativamente a  $\mathcal{U}$  e ao longo de  $\mathcal{W}$  é a aplicação linear  $s : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  dada por  $s(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} - \mathbf{w}$ , para  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  e  $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ .

Seja  $\mathcal{A}$  um espaço afim sobre  $\mathcal{V}$ , seja  $\mathcal{B}$  um subespaço afim com direcção  $\mathcal{U}$  e seja  $\mathcal{W}$  outro subespaço vectorial tal que  $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{V}$ . Escolhendo um ponto  $B \in \mathcal{B}$ , define-se a **reflexão** (ou *simetria*) relativamente a  $\mathcal{B}$  e ao longo de  $\mathcal{W}$  como sendo a aplicação  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  que satisfaz

$$\overrightarrow{B\sigma(A)} = s(\overrightarrow{BA}), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Mostre que  $\sigma$  é uma aplicação afim, que  $\sigma$  não depende da escolha do ponto  $B \in \mathcal{B}$  e que é uma *involução*, i.e.,  $\sigma(\sigma(A)) = A$ ,  $\forall A \in \mathcal{A}$ .

**Resolução:** A aplicação  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  assim definida fixa o ponto  $B$  pois

$$\overrightarrow{B\sigma(B)} = s(\overrightarrow{BB}) = s(0) = 0 \implies \sigma(B) = B.$$

A aplicação  $\sigma$  é afim com aplicação linear associada  $\vec{\sigma} = s$  porque

$$\overrightarrow{\sigma(B)\sigma(A)} = s(\overrightarrow{BA}), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

É propriedade de qualquer aplicação afim  $\varphi$  que a igualdade  $\overrightarrow{\varphi(B)\varphi(A)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{BA})$  vale para todos os pontos  $A$  e  $B$ . No caso de  $\sigma$ , também vale para qualquer  $B \in \mathcal{A}$ , mas para poder substituir  $\sigma(B)$  por  $B$  há que tomar  $B$  em  $\mathcal{B}$ . Finalmente, como  $s$  é uma involução ( $s(s(\mathbf{u} + \mathbf{w})) = s(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ ,  $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{w} \in \mathcal{W}$ ) tem-se, para qualquer  $A \in \mathcal{A}$ ,

$$\overrightarrow{\sigma(\sigma(A))} = s(\overrightarrow{B(\sigma(A))}) = s(s(\overrightarrow{BA})) = \overrightarrow{BA} \implies \sigma(\sigma(A)) = A.$$

□

- (5) Seja  $\mathcal{A}$  um espaço euclidiano. Uma reflexão  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  relativamente a  $\mathcal{B}$  e ao longo de  $\mathcal{W}$  diz-se *ortogonal* se  $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{U}$ , onde  $\mathcal{U}$  é a direcção do subespaço afim  $\mathcal{B}$ . Mostre que a reflexão  $\sigma$  é uma isometria se e só se for uma reflexão ortogonal.

**Resolução:** A reflexão  $\sigma$  é uma isometria se e só se a reflexão linear associada  $s$  é uma isometria linear, o que acontece se e só se

$$\begin{aligned} & \|s(\mathbf{u} + \mathbf{w})\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{w}\|, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \\ \Leftrightarrow & \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{w}\|^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \\ \Leftrightarrow & \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \\ \Leftrightarrow & \mathcal{U}^\perp = \mathcal{W}, \end{aligned}$$

ou seja, se e só se  $\mathcal{W}$  é o complemento ortogonal da direcção de  $\mathcal{B}$ . □